

Algèbre linéaire

Système consistant / inconsistent

- Système linéaire *consistant* (une ou plusieurs solutions): *pas* de pivot dans la dernière colonne de la matrice augmentée.
- Système linéaire *inconsistent* (pas de solution): on trouve une ou plusieurs lignes du type $[0\ 0\ 0\ 0\ b]$.

Solutions

- $Ax = 0$ a une solution *non* triviale (triviale: $x = 0$) ssi il y a *au moins* une variable libre;
- $Ax = b$ a une solution ssi b est une combinaison linéaire des colonnes de A .

Pas de solution: le système est inconsistent;

1 solution: $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}$

Infinité de solutions: $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solution sous forme paramétrique

1. Réduire la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. Exprimer les équations p.r. à la variable(s) libre(s): $\begin{cases} x_1 = -1 + 4x_3 \\ x_2 = 2 \\ \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 \end{cases}$
3. Écrire les équations paramétriques: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Transformations

Matrice associée à une transformation linéaire: $A = [T(\vec{e}_1) \ \dots \ T(\vec{e}_n)]$

Injective (ont-to-one): 1 pivot dans chaque colonne;

Surjective (onto): 1 pivot dans chaque ligne.

Propriétés des matrices et des déterminants

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $[A \ I] = [I \ A^{-1}]$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existe
- matrice singulière $\Leftrightarrow A^{-1}$ n'existe pas

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det A^{-1} = 1/\det A$
- 2 lignes de A échangées pour produire B
 $\Rightarrow \det B = -\det A$
- 1 ligne de A multiplié par k pour produire B
 $\Rightarrow \det B = k \det A$

Matrices en blocs

Matrice inverse

Soient A une matrice et $B = A^{-1}$ son inverse. Pour calculer B :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

d'où

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p$$

...

Determinants

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}, \quad X = CA^{-1} \text{ et } Y = D - CA^{-1}B$$

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \det(D)$$

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

Factorisation LU

1. Réduire la matrice A sous forme échelonnée *sans* échange de lignes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

2. À partir des colonnes pivot on calcule L , en divisant chaque colonne par son pivot:

$$\begin{array}{cccc} 2 & & & \\ -4 & 3 & & \\ 2 & -9 & 2 & \\ -6 & 12 & 4 & 5 \\ \div 2 & \div 3 & \div 2 & \div 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -3 & 1 & \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Méthodes de résolution itératives

$$\text{Soient } A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 1 & 15 & 1 \\ -1 & 1 & 20 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 18 \\ -12 \\ 17 \end{bmatrix} \text{ et l'équation } Ax = b$$

Méthode de Jacobi

Pour cette méthode on suppose que toutes les entrées de la diagonale de A sont *non nulles*. D est la matrice formée par les éléments de la diagonale de A .

$$Dx^{k+1} = (D - A)x^k + b$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} x^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} 18 \\ -12 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10y_1 = -x_2 + x_3 + 18 \\ 15y_2 = -x_1 - x_3 - 12 \\ 20y_3 = x_1 - x_2 + 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = (-x_2 + x_3 + 18)/10 \\ y_2 = (-x_1 - x_3 - 12)/15 \\ y_3 = (x_1 - x_2 + 17)/20 \end{cases} \Rightarrow x^1 \begin{bmatrix} 1.8 \\ -0.8 \\ 0.85 \end{bmatrix}, \text{ avec } x^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Méthode de Gauss-Seidel

Cette fois on considère D formée de la partie inférieure (diagonale incluse) de A .

$$Dx^{k+1} = (D - A)x^k + b$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 0 \\ -1 & 1 & 20 \end{bmatrix} x^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} 18 \\ -12 \\ 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = (-x_2 + x_3 + 18)/10 \\ y_2 = (-y_1 - x_3 - 12)/15 \\ y_3 = (y_1 - y_2 + 17)/20 \end{cases} \Rightarrow x^1 \begin{bmatrix} 1.8 \\ -0.92 \\ 0.968 \end{bmatrix}$$

Espaces vectoriels

Soit $A = [a_1 \dots a_n]$ de dimensions $m \times n$:

- $\text{Col } A = \text{Span}\{a_1 \dots a_n\}$ (utiliser les colonnes pivot!); $\text{Col } A$ est un sous-ensemble de R^m .
- $\text{Ker } A$ est l'ensemble de toutes les solutions du système. Pour déterminer $\text{Ker } A$:
 1. Mettre sous forme paramétrique l'équation $Ax = 0$, ie $\vec{x} = x_a(\vec{u}) + x_b(\vec{v}) + x_c(\vec{z})$;
 2. $\text{Ker } A = \text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}\}$.
- $\text{Ker } A$ est un sous-ensemble de R^n .
- $\dim(\text{Ker } A)$ est le nombre de variables libres.
- $\text{Rank } A$: nombre de colonnes pivot de A .

Valeurs et vecteurs propres

- Calcul des valeurs propres: $\det(A - \lambda I) = 0$ (équation caractéristique).

Multiplicité algébrique: nombre de fois que la valeur propre apparaît dans l'équation caractéristique.

Multiplicité géométrique = $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I))$ (nombre de vecteur lin indep.)

- Calcul des vecteurs propres: le vecteur propre correspondant au valeur propre λ_1 est solution de l'équation $(A - \lambda_1 I)x = 0$
- A est inversible ssi 0 n'est pas un valeur propre de A .
- Une matrice A $n \times n$ est diagonalisable ssi elle possède n valeurs propres distincts.

Orthogonalité et moindres carrés

- Longueur ou norme d'un vecteur: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
- Distance entre deux vecteur = $\|\vec{u} - \vec{v}\|$
- A a des colonnes orthogonales si $A^T A = I$; dans ce cas la matrice est orthogonale et $A^{-1} = A^T$

Projection orthogonale

Soit W un sous-espace de \mathbb{R}^n . Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ est une base orthogonale de W , la projection orthogonale $\hat{\vec{v}}$ de \vec{v} est donnée par:

$$\hat{\vec{v}} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p$$

Procédé de Gram-Schmidt

Soient $A = [\vec{x}_1 \dots \vec{x}_p]$ et $P = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p]$; ce procédé permet de calculer facilement une base orthogonale.

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{x}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 \\ &\dots \\ \vec{v}_p &= \vec{x}_p - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 - \dots - \frac{\vec{x}_p \cdot \vec{v}_{p-1}}{\vec{v}_{p-1} \cdot \vec{v}_{p-1}} \vec{v}_{p-1} \end{aligned}$$

Une base orthonormée est une base orthogonale dont chaque vecteur a été divisé par sa norme:

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$$

Factorisation QR

- On cherche une base orthogonale de A , et on déduit Q , une base orthonormée de A ;
- On déduit R : $R = Q^T A$

Moindres carrés

- $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$
- $\hat{x} = R^{-1} Q^T b$

Matrices symétriques et formes quadratiques

- Matrice symétrique: $A^T = A$; si $A^T = A$ la matrice est orthogonalement diagonalisable
- La forme quadratique est une fonction Q telle que $Q(x) = x^T A x$, où A est une matrice symétrique.
Une forme quadratique peut être

Définie positivement si toutes les valeurs propres de A sont positives;

Définie négativement si toutes les valeurs propres de A sont négatives;

Indéfinie si A a des valeurs propres positives et négatives;