

# Algèbre linéaire - Vrai et Faux

## Équations linéaires

1. La matrice  $5 \times 6$  a 6 lignes. . . . . F
2. Un système inconsistant a plus d'une solution. . . . . F
3. Deux systèmes linéaires sont équivalents si ils ont le même set de solution. . . . . V
4. Un exemple de combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  est le vecteur  $\frac{1}{2}\vec{v}_1$ . . . . . V
5.  $\text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$  est toujours visualisé par un plan qui passe par l'origine. . . . . F
6. Toute liste de 5 nombres réels est un vecteur de  $\mathbb{R}^5$ . . . . . V
7. Les constantes  $c_1, c_2, \dots$  dans la combinaison linéaire  $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_p\vec{v}_p$  ne peuvent pas tous être 0. . . . . F
8.  $\text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$  contient la ligne qui passe à travers  $u$  et l'origine. . . . . V
9. Demander si le système linéaire correspondant à la matrice augmentée  $[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ b]$  a une solution revient à demander si  $\vec{b}$  est dans  $\text{Span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ . . . . . V
10. Un vecteur  $\vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes d'une matrice  $A$  ssi l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a au moins une solution. . . . . V
11. L'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est consistant si la matrice augmentée  $[A \ \vec{b}]$  a un pivot dans chaque ligne. . . . . F
12. Si les colonnes d'une matrice  $A \ m \times n$  engendrent  $\mathbb{R}^m$ , alors l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est consistante pour tout  $\vec{b}$  de  $\mathbb{R}^m$ . . . . . V
13. Si  $A$  est une matrice  $m \times n$  et si l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est inconsistante pour certains  $\vec{b}$  de  $\mathbb{R}^m$ , alors  $A$  n'a pas un pivot dans chaque ligne. . . . . V
14. Toute combinaison linéaire de vecteur peut s'écrire sous la forme  $A\vec{x}$  pour une matrice  $A$  et un vecteur  $\vec{b}$  convenables. . . . . V
15. Si l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est inconsistante, le vecteur  $\vec{b}$  n'est pas dans la base engendré par les colonnes de  $A$ . . . . . V
16. Si la matrice augmentée  $[A \ \vec{b}]$  a un pivot dans chaque ligne, l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est inconsistante. . . . . F
17. Une équation homogène est toujours consistante. . . . . V
18. L'équation  $A\vec{x} = \vec{0}$  donne une description explicite de son ensemble solution. . . . . F
19. L'équation homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  a une solution triviale ssi l'équation a au moins une variable libre. . . . . F
20. L'ensemble solution de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est l'ensemble de tous les vecteurs de la forme  $\vec{w} = \vec{p} + \vec{v}_h$ , où  $\vec{v}_h$  est une solution de l'équation  $A\vec{x} = \vec{0}$  et  $A\vec{p} = \vec{b}$ . . . . . V
21. Si  $\vec{x}$  est une solution non triviale de  $A\vec{x} = \vec{0}$ , alors chaque élément de  $\vec{x}$  est non nul. . . . . F
22. L'équation  $\vec{x} = x_2\vec{u} + x_3\vec{v}$ , avec  $x_2, x_3$  libres ( $\vec{u}$  n'est pas un multiple de  $\vec{v}$ ) décrit un plan qui passe par l'origine. . . . . V
23. L'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est homogène si le vecteur  $\vec{0}$  est une solution. . . . . V
24. L'ensemble solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$  s'obtient par translation de l'ensemble solution de  $A\vec{x} = \vec{0}$ . . . . . V
25. Si  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  de  $\mathbb{R}^4$  et  $\vec{v}_1$  n'est pas un vecteur multiple de  $\vec{v}_2$ , alors  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  est linéairement indépendant. . . . . F
26. Si  $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_4$  sont des vecteurs linéairement indépendant de  $\mathbb{R}^4$  alors  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  est aussi linéairement indépendant. . . . . V

27. Une transformation linéaire est un type spéciale de fonction . . . . . V
28. Si  $A$  est une matrice  $3 \times 5$  et  $T$  est une transformation définie par  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$  alors le domaine de  $T$  est  $\mathbb{R}^3$  . . . . . F
29. Chaque transformation de matrice est une transformation linéaire . . . . . V
30. Pour que les colonnes d'une matrice  $7 \times 5$  soient linéairement indépendants, elle doit contenir 5 colonnes pivot . . . . . V
31. Les colonnes d'une matrice triangulaire sont toujours linéairement indépendants . . . . . V
32. Une transformation linéaire  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est déterminée complètement par ses effets sur les colonnes de la matric identité  $I_n$  . . . . . V
33. Si  $A$  est une matrice  $3 \times 2$  la transformation  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  ne peut pas être injective . . . . . F
34. Un système de  $n$  équations linéaires à  $n$  variables a au maximum  $n$  solutions . . . . . F
35. Si un système d'équations linéaires n'a pas de variable libre, il a une solution unique . . . . . F
36. Si le système  $A\vec{x} = \vec{b}$  a plus d'une solution, aussi  $A\vec{x} = 0$  aura plus d'une solution . . . . . V
37. Si la matrice augmentée  $[A\vec{b}]$  peut être mise sous forme échelonnée, alors l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est consistant . . . . . F
38. L'équation  $A\vec{x} = 0$  a une solution triviale ssi elle n'a pas de variable libre . . . . . F
39. Si  $A$  est  $m \times n$  et l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est consistante pour tout  $\vec{b}$  de  $\mathbb{R}^m$ , alors  $A$  doit avoir  $m$  colonnes pivot . . . . . V
40. Si une matrice  $A$   $m \times n$  a  $m$  colonnes pivot, l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a une solution unique pour tout  $\vec{b}$  de  $\mathbb{R}^m$  . . . . . F
41. Dans certains cas il est possible que 4 vecteurs engendrent  $\mathbb{R}^5$  . . . . . F
42. Si  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}\}$  sont linéairement indépendants, alors  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$  ne sont pas de  $\mathbb{R}^2$  . . . . . V

## Algèbre matricielle

43. Pour que la matrice  $B$  soit l'inverse de la matrice  $A$ , les deux équations  $AB = I$  et  $BA = I$  doivent être vraies . . . . . V
44. Chaque matrice élémentaire est inversible . . . . . V
45. Si  $A$  est une matrice inversible  $n \times n$ , l'équation  $Ax = b$  est consistante pour tout  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  . . . V
46. Si les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^n$ , les colonnes sont linéairement indépendants . . . . . V
47. Si  $A$  est une matrice  $n \times n$  l'équation  $Ax = b$  a au moins une solution pour tout  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  . . . . F
48. Si l'équation  $Ax = 0$  a une solution non-triviale,  $A$  a moins de  $n$  positions pivot . . . . . V
49. Si l'équation  $Ax = b$  a au moins une solution pour tout  $b$  de  $\mathbb{R}^n$ , la solution est unique pour chaque  $b$  . . . . . V
50. Si il existe un  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que l'équation  $Ax = b$  est inconsistante, la transformation  $x \mapsto Ax$  n'est pas injective . . . . . V
51. Si  $BC = BD$ , alors  $C = D$  . . . . . F
52. Si  $AC = 0$  alors  $A = 0$  ou  $C = 0$  . . . . . F
53. La transposée d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire . . . . . V
54. Un matrice élémentaire doit être carré . . . . . V
55. Chaque matrice carrée est un produit de matrices élémentaires . . . . . F
56. Si  $AB = I$ ,  $A$  est inversible . . . . . F
57. Si  $AB = BA$  et  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}B = BA^{-1}$  . . . . . V
58. Si  $A$  est inversible et  $r \neq 0$  alors  $(rA)^{-1} = rA^{-1}$  . . . . . F

## Determinants

59. Si  $A$  est une matrice  $2 \times 2$  avec  $\det A = 0$ , alors une colonne est le multiple de l'autre . . . . . V

60. Si  $A$  est une matrice  $3 \times 3$ ,  $\det 5A = 5 \det A$  . . . . . F  
 61.  $\det(-A) = -\det A$  . . . . . F  
 62.  $\det A^T A \geq 0$  . . . . . V  
 63. Si  $A^3 = 0$  alors  $\det A = 0$  . . . . . V

## Espaces vectoriels

64. Un vecteur est une flèche dans l'espace à 3 dimensions . . . . . V  
 65. Un sous-espace est aussi un espace vectoriel . . . . . V  
 66. Un seul vecteur est linéairement dépendant à lui même . . . . . F  
 67. Les colonnes d'une matrice inversible  $n \times n$  forment une base pour  $\mathbb{R}^n$  . . . . . V  
 68. Une base est un ensemble linéairement indépendant le plus grand possible . . . . . V  
 69. Le nombre de colonnes pivot d'une matrice  $A$  est égale à la dimension de  $\text{Col } A$  . . . . . V  
 70. La dimension de l'espace vectoriel  $\mathbb{P}_4$  est 4 . . . . . F  
 71. Si  $\dim V = n$  et  $S$  est un ensemble linéairement indépendant de  $V$ , alors  $S$  est une base de  $V$  . . . . . F  
 72.  $\mathbb{R}^2$  est un sous-espace bidimensionnel de  $\mathbb{R}^3$  . . . . . F  
 73. Le nombre de variables dans l'équation  $Ax = 0$  est égal à la dimension de  $\text{Ker } A$  . . . . . F  
 74.  $\text{Lign } A$  est égal à  $\text{Col } A^T$  . . . . . V  
 75.  $\dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Col } A) = \text{nombre de lignes de } A$  . . . . . F

## Valeurs et vecteurs propres

76. Si  $Ax = \lambda x$  pour quelque vecteur  $x$ , alors  $\lambda$  est un valeur propre de  $A$  . . . . . F  
 77. Si  $Ax = \lambda x$  pour quelque  $\lambda$ , alors  $x$  est un vecteur propre de  $A$  . . . . . V  
 78. Si  $v_1$  et  $v_2$  sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, les valeurs propres correspondants sont distincts . . . . . F  
 79. Si  $A$  est inversible, alors  $A$  est diagonalisable . . . . . F  
 80.  $A$  est diagonalisable ssi  $A$  a  $n$  valeurs propres . . . . . F  
 81. Si  $A$  est diagonalisable, alors  $A$  a  $n$  valeurs propres distincts . . . . . F  
 82. Si  $A$  est diagonalisable, alors  $A$  est inversible . . . . . F  
 83. Si  $A$  est inversible et 1 est une valeur propre de  $A$ , 1 est aussi valeur propre de  $A^{-1}$  . . . . . V  
 84. Si  $A$  contient une ligne ou une colonne de zéros, 0 est une valeur propre de  $A$  . . . . . V  
 85. Il existe des matrices  $2 \times 2$  qui n'ont pas de vecteurs propres dans  $\mathbb{R}^2$  . . . . . V  
 86. Deux vecteurs propres correspondant à la même valeur propre sont linéairement dépendants . . . . . F  
 87.  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité . . . . . V  
 88. Si  $A$  est diagonalisable, les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendants . . . . . F

## Orthogonalité et moindres carrés

89. La projection orthogonale de  $y$  sur  $v$  est la même que la projection orthogonale de  $y$  sur  $cv$  ( $c \neq 0$ ) . . . . . V  
 90. Une matrice orthogonale est inversible . . . . . V