

Algorithmique

Examen de contrôle continu - Mars 2004

Durée : 2h

- Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso de notes.
- Les calculatrices, téléphones, ordinateurs etc. . . sont interdits.

Document réécrit par Samuel Robyr <samuel.robyr@epfl.ch>.
Merci de signaler tout erreur ou remarque.

Version du document : 19 avril 2005

La version courante de ce document est disponible à l'adresse <http://epfl.neoch.net>

Problème 1 [9+3 points]. Triez la liste suivante avec heap sort :

- a) Insérer les éléments suivants dans un arbre AVL initialement vide, de façon que l'arbre reste AVL. Redessiner l'arbre après chaque insertion.

11, 2, 4, 21, 19, 15, 30

- b) Effacer l'élément 11 de l'arbre, de telle façon qu'il reste AVL.

Problème 2 [7+7 points]. Soient $X = \langle C, A, B, B, C, A, B, C \rangle$ et $Y = \langle B, C, B, A, C, A, B, A \rangle$ deux suites de caractères.

- a) Trouver une sous-suite de longueur 5 de X et Y .
b) Montrer qu'il n'y a pas de sous-suite commune de longueur supérieure à 5.

Problème 3 [10+12+4 points].

- a) Soit A_1, A_2, \dots une suite de nombres réels positifs avec $A_1 = A_2 = 1$ et $A_{n+1} = 2A_n + A_{n-1}$. Montrer que $A_n = \theta((1 + \sqrt{2})^n)$.
b) Soit A_1, A_2, \dots une suite de nombres réels avec $A_1 = 1$ et $A_n = 3A_{n-1} + 2n$ pour $n \geq 2$. Trouver des réels a, b, c tels que $A_n = a3^n + bn + c$, et prouver ensuite cette assertion par induction.
c) Pour la suite A_n de la partie b), lesquels des assertions suivantes sont vraies ?
(i) $A_n = O(3^{n-2})$
(ii) $A_n = \Omega(n^4)$
(iii) $A_n = \Omega(2^{n^2})$
(iv) $A_n = \theta(3^n)$

Problème 4 [15 points]. Construire un algorithme qui multiplie deux polynômes de degré ≤ 2 , dont les coefficients sont dans \mathbb{R} et qui utilise au plus 6 multiplications d'éléments de \mathbb{R} . Donner l'algorithme en pseudo-code.

(Indication : Utiliser une variante de l'algorithme de Karatsuba)

Problème 5 [12 points]. Donner des formules en fonction de n et m pour le nombre d'additions et le nombre de multiplications d'éléments de \mathbb{R} nécessaires pour multiplier avec l'algorithme naïf deux polynômes sur \mathbb{R} de la forme

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad \text{et} \quad x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0$$

Problème 6 [15+5+5 points]. Un triangle dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets $x, y, z \in V$ tels que $(x, y), (y, z), (z, x) \in E$.

Soit G un graphe non-orienté avec n sommets, et dans lequel chaque sommet est de degré d .

- a) Supposer que le graphe est représenté avec une structure de données qui permet d'énumérer les voisins de n'importe quel sommet en temps $O(d)$, et qui permet de vérifier si deux sommets sont voisins en temps $O(1)$. Construire un algorithme pour trouver un triangle (s'il en existe un) dans G qui utilise $O(d^3 n)$ opérations. Donner l'algorithme en pseudo-code.
- b) Quel est le temps de parcours de votre algorithme si le graphe est donné par une matrice d'adjacence ?
- c) Quel est le temps de parcours de votre algorithme si le graphe est donné par une liste de listes liées ?