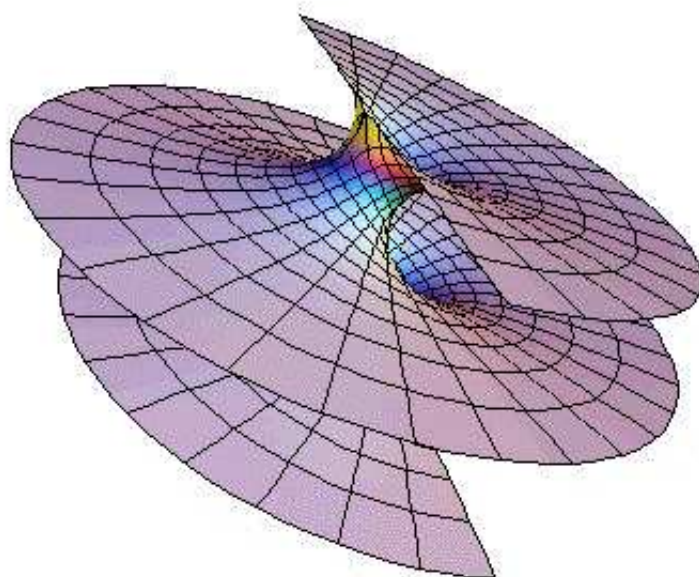


# Analyse III

Samuel Robyr



27 août 2004



Copyright © 2003-2004 Samuel Robyr.

L'image de la surface minimale de Riemann de la couverture a été produite avec 3D-XplorMath.

Ce document est libre ; vous pouvez le redistribuer et/ou le modifier selon les termes de la Licence de Documentation Libre GNU (GNU Free Documentation License) publiée par la Free Software Foundation (version 1.2 ou toute autre version ultérieure choisie par vous).

Ce document est diffusé en espérant qu'il sera utile, mais SANS AUCUNE GARANTIE, ni explicite ni implicite. Reportez-vous à la licence FDL pour plus de détails.

# Préface

Ce document est un résumé très complet du cours d'Analyse III donné par le professeur Y. Biollay en 2002-2003. Les preuves des théorèmes ainsi que quelques exemples numériques ont été omis .

La version courante de ce document est disponible sur :  
<http://epfl.neoch.net/>.

Je tiens à remercier sincèrement les nombreuses personnes qui ont fourni des corrections, des suggestions et du texte pour améliorer ce document.

Ajoutons pour que je suis responsable de toutes les erreurs que vous pourriez trouver dans ce document.

Si vous avez des suggestions concernant ce qui pourrait être ajouté, supprimé, modifié ou corrigé dans ce document contactez-moi.

Samuel Robyr <[samuel.robryr@epfl.ch](mailto:samuel.robryr@epfl.ch)>  
*Faculté Informatique et Communications*  
*École Polytechnique Fédérale de Lausanne*



# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>3</b>
<b>I Courbes et surfaces de l'espace</b>	<b>9</b>
<b>1 Courbes dans l'espace</b>	<b>11</b>
1.1 Abscisse curviligne . . . . .	12
<b>2 Dérivée des vecteurs variables</b>	<b>15</b>
2.1 Propriétés . . . . .	15
2.2 Applications . . . . .	16
<b>3 Intégrales de surfaces</b>	<b>17</b>
3.1 Représentation paramétrique d'une surface . . . . .	17
3.2 Calcul de l'aire d'une surface . . . . .	19
3.2.1 Calcul de $\ \vec{r}_u \times \vec{r}_v\ $ . . . . .	19
3.3 Intégrales de surface . . . . .	22
<b>II Champs vectoriels, travail et flux</b>	<b>25</b>
<b>4 Champs vectoriels</b>	<b>27</b>
4.1 Champs vectoriels particuliers . . . . .	29
4.1.1 Champ constant . . . . .	29
4.1.2 Champ central . . . . .	29
4.1.3 Champ $\vec{r}$ des vitesses . . . . .	29
4.1.4 Champ de gradient . . . . .	30
<b>5 Travail et circulation d'un champ vectoriel</b>	<b>31</b>
<b>6 Flux d'un champ vectoriel à travers une surface</b>	<b>35</b>
<b>7 Surfaces planes : formule de Riemann</b>	<b>39</b>
<b>8 Surfaces dans l'espace : formule de Stokes et rotationnel</b>	<b>41</b>
8.1 Généralisation à une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ quelconque . . . . .	43
8.1.1 Conséquences . . . . .	43

<b>9 Domaines dans l'espace : formules de Gauss et divergence</b>	<b>47</b>
9.1 Première formule de Gauss . . . . .	47
9.2 Seconde formule de Gauss (divergence) . . . . .	48
9.2.1 Conséquences . . . . .	49
<b>10 Combinaison entre les opérateurs grad, div et rot</b>	<b>53</b>
10.1 Petit rappel . . . . .	53
10.2 Sommes . . . . .	53
10.3 Produits . . . . .	53
10.4 Produits vectoriels . . . . .	54
10.5 Composition d'opérateurs . . . . .	54
<b>11 Formules de Green et intégrale de Dirichlet</b>	<b>55</b>
11.1 Conséquences . . . . .	56
<b>12 Coordonnées curvilignes orthogonales</b>	<b>59</b>
12.1 Éléments différentiels de longueur, d'aire et de volume . . . . .	59
12.2 Expressions du gradient, div et $\Delta$ en coordonnées curvilignes . . . . .	61
12.2.1 Gradient . . . . .	61
12.2.2 Divergence . . . . .	62
12.2.3 Opérateur $\Delta$ (de Laplace) . . . . .	62
12.2.4 Rotationnel . . . . .	62
<b>13 Potentiels newtoniens</b>	<b>65</b>
<b>14 Applications à des modèles physiques</b>	<b>69</b>
14.1 Loi d'Archimède . . . . .	69
14.2 Équation de Poisson de l'électrostatique . . . . .	69
14.3 Équation de la continuité en hydrodynamique . . . . .	70
14.4 Équation de conduction ou de diffusion thermique . . . . .	70
14.5 Loi de Helmholtz sur le tourbillons . . . . .	71
<b>III Équations aux valeurs propres (introduction)</b>	<b>73</b>
<b>15 Le problème du flambage</b>	<b>75</b>
<b>16 Problème de Sturm-Liouville - Corde vibrante</b>	<b>77</b>
16.1 Cas particuliers . . . . .	77
16.2 Quelques propriétés des valeurs propres et des fonctions propres . . . . .	79
<b>IV Séries de Fourier</b>	<b>81</b>
<b>17 Préliminaires</b>	<b>83</b>
17.1 Position du problème . . . . .	83
17.2 Rappel concernant les séries . . . . .	84
17.2.1 Séries numériques à termes positifs . . . . .	84

---

17.2.2	Séries entières . . . . .	86
17.2.3	Séries de fonctions . . . . .	86
17.3	Les séries trigonométriques . . . . .	88
<b>18</b>	<b>Coefficients de Fourier et validité des résultats</b>	<b>89</b>
18.1	Deux propriétés des fonctions périodiques . . . . .	89
18.2	Coefficients de Fourier . . . . .	90
18.3	Conditions et théorème de Dirichlet . . . . .	90
18.4	Erreur quadratique moyenne . . . . .	90
18.4.1	Conséquences . . . . .	91
<b>19</b>	<b>Cas particulier et exemples</b>	<b>93</b>
19.1	Fonctions paires et impaires . . . . .	93
19.2	Exemples de développements . . . . .	93
<b>20</b>	<b>Fonctions périodiques de période <math>T</math> et développement complexe</b>	<b>97</b>
20.1	Écriture complexe . . . . .	97
20.2	Convergence uniforme et vitesse de convergence . . . . .	98
20.2.1	Conséquence : vitesse de convergence des coefficients de $F$ . . . . .	98
20.2.2	Application . . . . .	99
20.3	Systèmes orthonormés complets . . . . .	99





**Première partie**

**Courbes et surfaces de l'espace**



# Chapitre 1

## Courbes dans l'espace

Une courbe est une application d'une partie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^3$

$$t \in [t_1; t_2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{ou aussi } \vec{r}_\gamma = \vec{r}(t)$$

$\gamma$  est définie par une représentation *paramétrique* (resp. *vectorielle*). C'est une représentation naturelle de  $\gamma$  (appelée trajectoire).

### Exemple 1.1

Soit

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad [\text{droite}]$$

Somme des équations :  $x + y + z = 3$  équation d'un plan (surface) qui contient  $\gamma$ .

En éliminant  $t$  (p. ex) des 2 premières équations on trouve  $x - y = -1$ , qui représente un plan (projetant).

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

est une représentation cartésienne de  $\gamma$  qui est l'intersection de deux surfaces (planes).

Mais on peut déduire depuis l'équation de départ, par exemple :

$$(2 - y)z = 2t^2 = 2(1 - x)^2$$

et

$$x(3 - y) = (1 - t)(1 + t) = 1 - t^2 = 1 - \frac{z^2}{4}$$

d'où

$$\begin{cases} 2x^2 + yz - 4x - 2z + 2 = 0 \\ z^2 - 4xy + 12z - 4 = 0 \end{cases}$$

Il existe une infinité de représentations cartésiennes de la courbe  $\gamma$ . De façon générale le système

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

peut être interprété comme intersection de 2 surfaces c-à-d comme courbe (ce qui peut se réduire éventuellement à des points distincts).

### Exemple 1.2

Soit

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 & [\text{surface centrée en } O] \\ x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9 & [\text{surface centrée en } (0,0,5)] \end{cases}$$

Cherchons l'intersection des deux surfaces sphériques :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 10z - 16 \end{cases} \Leftrightarrow 14 = 10z - 16 \Leftrightarrow z = 3$$

L'intersection est une cercle  $\gamma$  situé dans le plan  $z = 3$ .  $\gamma$  est un parallèle d'équation

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3^2 = 14 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

c-à-d :

$$\gamma : \begin{cases} x = \sqrt{5} \cos t \\ y = \sqrt{5} \sin t \\ z = 3 \end{cases}$$

### Exemple 1.3

Soit

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (\epsilon') \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 & (\epsilon'') \end{cases} \quad [\text{cylindre de révolution d'axe parallèle à } Oz]$$

En posant  $x = \sin t$  on obtient  $y = 1 + \cos t$  et  $z^2 = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2}$ . D'où

$$\gamma : \begin{cases} x = \sin t \\ y = 1 + \cos t \\ z = \pm 2 \sin \frac{t}{2} \end{cases}$$

## 1.1 Abscisse curviligne

Pour décrire la courbe  $\gamma$ , on peut utiliser comme paramètre la *longueur d'arc*  $s$  de  $\gamma$ .

Soit

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [0, T]$$

L'élément différentiel d'arc est

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)) (dt)^2$$

d'où

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt = \psi(t)$$

On a donc

$$t = \psi^{-1}(s)$$

ce qui nous donne

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) = x(\psi^{-1}(s)) \\ y = y(t) = y(\psi^{-1}(s)) \\ z = z(t) = z(\psi^{-1}(s)) \end{cases}$$

*Remarque 1.1.* Si  $s$  varie entre 0 et  $s_0$ , alors la longueur d'arc entre les points extrêmes vaut  $s_0$ .

#### Example 1.4

Exprimer

$$\gamma : \begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = \frac{2}{3} \sqrt{2} t^{3/2} \end{cases} \quad t \geq 0$$

à l'aide de son abscisse curviligne.

On a

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, \sqrt{2} t^{1/2})$$

et

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + t^2 + 2t} dt = \int_0^t (1 + t) dt = \frac{1}{2} (1 + t)^2 \Big|_0^t = \frac{1}{2} [(1 + t)^2 - 1]$$

donc

$$t = \sqrt{2s + 1} - 1$$

D'où

$$\begin{aligned} x(s) &= (\sqrt{2s + 1} - 1) \cos(\sqrt{2s + 1} - 1) \\ y(s) &= (\sqrt{2s + 1} - 1) \sin(\sqrt{2s + 1} - 1) \\ z(s) &= \frac{2}{3} \sqrt{2} (\sqrt{2s + 1} - 1)^{3/2} \end{aligned}$$



# Chapitre 2

## Dérivée des vecteurs variables

Soit  $\vec{v}$  un vecteur dépendant de  $t$ .  $\vec{v} = \vec{v}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , les extrémité de  $\vec{v}(t)$  décrivent une courbe  $\Gamma$  de l'espace.

Par définition

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}$$

En écrivant  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , on a

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

et

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

est un *vecteur tangent* à  $\Gamma$  au point  $P(t)$  (= vecteur sécant passant par un point double :  $P^t \rightarrow P$ ).

Plus généralement on a :

$$\frac{d^n \vec{v}}{dt^n} = \frac{d^n x}{dt^n} \vec{i} + \frac{d^n y}{dt^n} \vec{j} + \frac{d^n z}{dt^n} \vec{k} \quad \text{si } x(t), y(t), z(t) \in C^n(I), \quad I = [t_1, t_2]$$

D'où la règle : les dérivées d'un vecteur se réduisent aux *dérivées des composantes* de ce vecteur.

### 2.1 Propriétés

Soit  $f(t)$  une fonction de  $t$  et  $\vec{v}(t)$  un vecteur dépendant de  $t$ . On a :

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} [f(t)\vec{v}(t)] &= \frac{df}{dt} \vec{v} + f \frac{d\vec{v}}{dt} \\ - \frac{d}{dt} [\vec{v}(t) \cdot \vec{w}(t)] &= \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} \\ - \frac{d}{dt} [\vec{v}(t) \times \vec{w}(t)] &= \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w} + \vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt} \end{aligned}$$

## 2.2 Applications

Soit  $\vec{v}(t)$  un vecteur dépendant de  $t$  et  $\Gamma$  la courbe définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x = v_1(t) \\ y = v_2(t) \\ z = v_3(t) \end{cases}$$

1. Si  $\vec{v}$  est défini par l'abscisse curviligne de  $\Gamma$ , alors

$$\left\| \frac{d\vec{v}}{ds} \right\| = 1$$

puisque

$$\left\| \frac{d\vec{v}}{ds} \right\| = \sqrt{\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{ds} = \frac{ds}{ds} = 1$$

2. Soit  $\Gamma_1$  la projection de la courbe  $\Gamma$  sur le plan  $\pi_1 = xOy$  en  $P_1 =$  projection de  $P$ . Alors  $(\dot{x}, \dot{y})$  sont les composantes du vecteur tangent à  $\Gamma_1$  en  $P_1(x, y)$ .

$$\tan \alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Big|_{P_1} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = y' \Big|_{P_1}$$

où  $y = f(x)$  est la représentation cartésienne de

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

3. Si  $\|\vec{v}(t)\| = a$  ( $\Gamma$  est sur la sphère centrée en  $O$  et de rayon  $a$ ), alors la tangente à la courbe  $\Gamma$  en tout point est orthogonal au vecteur lieu :  $\vec{v} \perp \dot{\vec{v}}$ ;



# Chapitre 3

## Intégrales de surfaces

### 3.1 Représentation paramétrique d'une surface

Une courbe est l'image dans  $\mathbb{R}^3$  d'un domaine du plan  $(u, v)$ . C'est une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in G$$

Dans  $Oxyz$ , un point  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  correspond à la *paire*  $v = v_0$  et  $u = u_0$ .

L'élimination de  $u$  et  $v$  entre ces 3 relations données (quand c'est possible) fournit l'équation cartésienne implicite de la surface  $S$  :

$$F(x, y, z) = 0$$

De plus

$$\overrightarrow{\text{grad}} F \Big|_{P_0} = (F_x, F_y, F_z) \Big|_{P_0}$$

est un *vecteur normal* à  $S$  en  $P_0$ .

#### Exemple 3.1

Soit

$$\pi : \begin{cases} x = a_1 + b_1 u + c_1 v \\ y = a_2 + b_2 u + c_2 v \\ z = a_3 + b_3 u + c_3 v \end{cases}$$

est une *représentation paramétrique d'un plan*  $\pi$ .

On peut écrire  $\vec{r} = (x, y, z) = \vec{a} + \vec{b}u + \vec{c}v$ .

Notons  $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ , alors

$$\vec{n} \cdot (x, y, z) = \vec{n} \cdot \vec{a} + \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{b}}_{=0} u + \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{c}}_{=0} v$$

d'où l'équation cartésienne de  $\pi$  :

$$\pi : n_1 x + n_2 y + n_3 z - d = 0$$

On a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} F = (n_1, n_2, n_3) = \vec{b} \times \vec{c}$$

**Exemple 3.2**

Soit  $y^2 + z^2 = 4$  l'équation d'un cylindre de révolution d'axe  $Ox$  et de rayon 2.

Toute relation entre les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  représente une surface dans  $\mathbb{R}^3$  même si l'une d'entre elle n'apparaît pas effectivement.

**Exemple 3.3**

Soit la surface hélicoïdale

$$H : \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = cv \end{cases}$$

En maintenant  $u$  fixe ( $u = u_0$ ) on obtient

$$H : \begin{cases} x = u_0 \cos v \\ y = u_0 \sin v \\ z = cv \end{cases}$$

C'est une courbe  $\Gamma \subset H$ . Elle est aussi située sur la surface

$$x^2 + y^2 = u_0^2 (\cos^2 v + \sin^2 v) = u_0^2$$

qui est un cylindre de rayon  $u_0$  et  $\Gamma$  est une hélice.

Ainsi d'une manière générale si l'on garde  $u = u_0$  fixe (ou  $v = v_0$ ), on décrit une courbe sur la surface considérée.

**Exemple 3.4**

Soit une sphère de rayon  $R$ . On a comme paramètres les angles d'Euler  $\theta$  et  $\varphi$  :  $\theta = \angle(0z, OP)$  et  $\varphi = \angle(0x, OP')$ .

$$S : \begin{cases} x = OP' \cos \varphi = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = OP' \sin \varphi = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

d'où

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + R^2 \cos^2 \theta = R^2$$

donc  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

En gardant  $\theta = cte = \theta_0$ , alors  $z = R \cos \theta_0 = cte$ . La courbe  $\Gamma \subset S$  est dans un plan horizontal et

$$\begin{cases} x = R \sin \theta_0 \cos \varphi = r_0 \cos \varphi \\ y = R \sin \theta_0 \sin \varphi = r_0 \sin \varphi \end{cases}$$

est un cercle dans le plan  $\pi$ .  $\Gamma$  est un parallèle (géographique).

En gardant  $\varphi = cte = \varphi_0$  on a

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi_0 \Rightarrow R \sin \theta = \frac{1}{\cos \varphi_0} \\ y = R \sin \theta \sin \varphi_0 \Rightarrow y = \tan \varphi_0 x = mx \end{cases}$$

c'est un demi-plan vertical passant par  $Oz$ , c'est un méridien.

## 3.2 Calcul de l'aire d'une surface

On peut considérer sur la surface  $S$  un élément d'aire  $\Delta S$  défini par les frontières du réseau de courbes déterminées par  $u = u_0$  et  $u = u_0 + \Delta u$ , ainsi que  $v = v_0$  et  $v = v_0 + \Delta v$ .

$$\overrightarrow{OP} = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) = \vec{r}(u_0, v_0)$$

d'où

$$\begin{aligned} &= \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0) = \\ &= (x(u_0 + \Delta u, v_0) - x(u_0, v_0), y(u_0 + \Delta u, v_0) - y(u_0, v_0), z(u_0 + \Delta u, v_0) - z(u_0, v_0)) = \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{u_0, v_0} \cdot \Delta u + \epsilon'_1(\Delta u), \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{u_0, v_0} \cdot \Delta u + \epsilon'_2(\Delta u), \frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{u_0, v_0} \cdot \Delta u + \epsilon'_3(\Delta u) \right) = \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \Delta u + \vec{\epsilon}'(\Delta u) \end{aligned}$$

où  $\epsilon'_i(\Delta u) \rightarrow 0$  comme  $(\Delta u)^2$ .

De la même façon on obtient  $\vec{b}$  :

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) = \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \Delta v + \vec{\epsilon}''(\Delta v) \end{aligned}$$

On a alors

$$\Delta S = \|\vec{a} \times \vec{b}\| + \epsilon(\Delta u \Delta v) = \|\vec{r}_u \Delta u \times \vec{r}_v \Delta v\| + \epsilon(\Delta u \Delta v)$$

et à la limite

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Ainsi on obtient l'aire de  $S$  :

**Formule 3.1 (Aire de S).**

$$S = \iint_{(u,v) \in G} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv \quad \text{avec } \vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \text{ et } \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

*Remarque 3.1.*  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  est orthogonal aux vecteurs tangents aux deux courbes passant par  $P$ .  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  est donc colinéaire à  $\overrightarrow{\text{grad}} F$  (vecteur normal à  $S$ ) si  $F(x, y, z) = 0$  est l'équation cartésienne de  $S$ .

### 3.2.1 Calcul de $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$

Voici une méthode pratique pour le calcul de  $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$  : soit  $\alpha$  l'angle entre  $\vec{r}_u$  et  $\vec{r}_v$ . On a alors

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = \|\vec{r}_u\|^2 \cdot \|\vec{r}_v\|^2 \sin^2 \alpha = \|\vec{r}_u\|^2 \cdot \|\vec{r}_v\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \vec{r}_u^2 \cdot \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2$$

**Example 3.5 Surface sphérique**

Soit la surface sphérique

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= \vec{r}_\theta = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, -R \sin \theta) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \vec{r}_\varphi = (-R \sin \theta \sin \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

d'où  $\vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\varphi = 0$ .

De plus

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\|^2 &= [R^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + R^2 \sin^2 \theta] \cdot [R^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)] = \\ &= R^2 R^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

d'où  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Remarque 3.2. En calculant  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi$  on obtient

$$(R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi, R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi, R^2 \sin \theta \cos \theta) = R \sin \theta (x, y, z)$$

On a  $S : x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$  d'où  $\overrightarrow{\text{grad}} F = (2x, 2y, 2z)$ , colinéaire à  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi$ .

Application : aire d'une zone sphérique  $\varphi \in [0, 2\pi]$  et  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . On a

$$\begin{aligned} S &= \iint_{(\theta, \varphi)} dS = \iint_{(\theta, \varphi)} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \\ &= R^2 2\pi (-\cos \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = 2\pi R^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = 2\pi R (R \cos \theta_1 - R \cos \theta_2) \end{aligned}$$

**Example 3.6**

Soit  $S$  la surface définie par

$$\begin{cases} x = 3u - 4v \\ y = 4u + 3v \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases} \quad (u, v) \in G = \{u^2 + v^2 \leq 144\}$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (3, 4, u) \\ \vec{r}_v &= (-4, 3, -v) \end{aligned}$$

$$\vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = (9 + 16 + u^2)(16 + 9 + v^2) - (-uv)^2 = 625 + 25(u^2 + v^2)$$

d'où

$$dS = 5 \sqrt{25 + u^2 + v^2} du dv$$

et donc

$$S = \iint_{(u,v) \in G} \sqrt{25 + u^2 + v^2} du dv$$

converti en coordonnées polaires on a :

$$S = 5 \iint_{(\rho, \varphi)} \sqrt{25 + \rho^2} \rho d\rho d\varphi$$

Or,  $G$  est un disque et on peut déduire que  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  et  $0 \leq \rho \leq 12$ . On a donc

$$S = 5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{12} \rho (25 + \rho^2)^{1/2} d\rho = \frac{\pi}{3} 20'720 \approx 21'700$$

### Exemple 3.7 Cas particulier : surface explicite

Cas des surfaces  $z = f(x, y)$  données explicitement :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (1, 0, f_u) \\ \vec{r}_v &= (0, 1, f_v) \end{aligned}$$

$$\vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = (1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - (f_u f_v)^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2$$

d'où

$$dS = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} du dv = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \overrightarrow{\text{grad}}^2 z(x, y)$$

et donc

$$S = z(x, y)$$

On a aussi

$$\text{Aire de } S = \iint_{(x,y) \in S'} \sqrt{1 + \overrightarrow{\text{grad}}^2 f(x, y)} dx dy$$

### Exemple 3.8

Calculer l'aire de la portion de surface  $z = xy$  située à l'intérieur du cylindre  $x^2 + y^2 = 1$ .

La projection de  $S$  sur  $Oxy$  est un disque de rayon 1.

$$\overrightarrow{\text{grad}} z = (f_x, f_y) = (y, x)$$

$$dS = \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy$$

$$S = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho (1 + \rho^2)^{1/2} d\rho = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

Remarque 3.3.

1.  $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$  est l'équation cartésienne d'une surface donnée explicitement. L'élément de surface peut donc s'écrire  $dS = \|\vec{\text{grad}} F\| dx dy$ .
2. Si la surface est donnée explicitement par  $F(x, y, z) = 0$ , alors l'élément de surface vaut

$$dS = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dx dy = \sqrt{1 + \frac{F_x^2 + F_y^2}{F_z^2}} dx dy = \frac{\|\vec{\text{grad}} F\|}{|F_z|} dx dy$$

3. Soit  $\vec{n}$  un vecteur normal unitaire à la surface. Alors  $n_3 dS = dx dy$ .

### 3.3 Intégrales de surface

On généralise l'intégration d'aire  $\iint_{(u,v)} dS$  si l'on considère une fonction  $\varphi(u, v)$  liée à l'élément de surface  $dS$ , par exemple  $\varphi =$  densité superficielle  $\mu(u, v)$ . On a la masse de la couche superficielle qui vaut :

$$M = \iint_{(u,v) \in G} \underbrace{\mu(u, v)}_{\text{densité de } dS} dS = \iint_{(u,v)} \mu(u, v) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Si l'on exprime la masse spécifique sur la surface  $z = f(x, y)$  par  $\mu(x, y, z)$ , on a :

$$M = \iint_{(x,y)} \mu(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

De façon semblable on pourra calculer le centre de gravité d'une couche superficielle non homogène  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , de masse totale  $M$ . Par exemple :

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_{P \in S} x \mu(P) dS$$

#### Exemple 3.9

Soit  $H$  l'hémisphère supérieur de rayon  $R$  centré en  $O$  ( $z \geq 0$ ). Quelle est la masse formée par la couche superficielle de densité

$$\mu(P) = \mu(x, y, z) = \frac{m}{R^4} (x^2 + y^2) \quad P \in H$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{m}{R^4} \iint_{S=H} (x^2 + y^2) \, dS = \\ &= \frac{m}{R^4} \iint_{(\theta, \varphi)} R^2 \sin^2 \theta \, R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \\ &= m \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta = \\ &= 2\pi m \int_0^{\pi/2} (\sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) \, d\theta = \\ &= 2\pi m \left( -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{4}{3} \pi m \end{aligned}$$





## **Deuxième partie**

### **Champs vectoriels, travail et flux**



# Chapitre 4

## Champs vectoriels

On appelle *champ scalaire*  $f$  dans un domaine  $G \subset \mathbb{R}^3$  une fonction  $f(x, y, z)$  avec  $D_f = G$ .  
Par exemple

- $f$  = masse spécifique d'un solide ;
- $f$  = température ;
- $f$  = énergie potentielle.

**Definition 4.1.**  $\vec{q}$  est un *champ vectoriel* dans  $G$  si à chaque point  $P(x, y, z) \in G$  on fait correspondre un vecteur (variable)  $\vec{q}(P) = (q_1(x, y, z), q_2(x, y, z), q_3(x, y, z))$ .

De façon générale, les  $q_i$  peuvent dépendre du temps  $t$  :  $q_i = q_i(P, t)$ . Si  $\vec{q}$  est indépendant de  $t$  on dira que  $\vec{q}$  est un champ vectoriel *stationnaire*. Par exemple

- $\vec{q}$  = champ électrique ;
- $\vec{q}$  = champ magnétique ;
- $\vec{q}$  = champ de forces ;
- ...

**Definition 4.2.** On appelle *trajectoire* d'un champ vectoriel la courbe  $\Gamma \subset D_{q_i}$  telle qu'en chacun de ses points  $\vec{q}$  est le vecteur tangent à  $\Gamma$ .

De cette définition on peut déduire que

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \text{ est colinéaire à } (q_1, q_2, q_3)$$

### Méthode de résolution

Soit  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ . Cherchons les trajectoires  $\Gamma$  de  $\vec{q}$  où  $\Gamma$  est définie par  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . On a le système

$$\frac{\dot{x}}{q_1} = \frac{\dot{y}}{q_2} = \frac{\dot{z}}{q_3} = k(t) \iff \frac{\dot{x}}{q_1} = \frac{\dot{y}}{q_2} = \frac{\dot{z}}{q_3} = k(t)$$

On pose

$$dT = k(t) dt \Rightarrow T = K(t) = \int k(t) dt$$

et on obtient

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{q_1} &= dT \\ \frac{dy}{q_2} &= dT \\ \frac{dz}{q_3} &= dT \end{aligned} \right\} \text{ où } x, y, z \text{ sont des fonctions de } T$$

On a donc trois équations différentielles à résoudre.

#### Exemple 4.1

Soit  $\vec{q} = (x, xe^{-y}, x+z)$ . Cherchons les trajectoires  $\Gamma$  de  $\vec{q}$  :

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{xe^{-y}} = \frac{\dot{z}}{x+z} = k(t)$$

1.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} = k(t) &\Rightarrow \frac{dx}{x} = k(t)dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x = \int k(t)dt = K(t) + c_1 \\ &\Rightarrow x = C_1 e^{k(t)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{dy}{dt}}{C_1 e^{k(t)} e^{-y}} = k(t) &\Rightarrow e^y dy = C_1 e^{k(t)} \Rightarrow e^y = C_1 \int k'(t) e^{k(t)} dt + C_2 \\ &\Rightarrow e^y = C_1 e^{k(t)} + C_2 \\ &\Rightarrow y = \ln(C_1 e^{k(t)} + C_2) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{dz}{dt}}{x+z} = k(t) &\Rightarrow \frac{\dot{z}}{C_1 e^{k(t)} + z} = k(t) \Rightarrow \dot{z} = C_1 e^{k(t)} k(t) + k(t)z \\ &\Rightarrow \dot{z} - k(t)z = C_1 e^{k(t)} k(t) \end{aligned}$$

On a ici une équation linéaire différentielle linéaire homogène (à coefficients non constants).

**Solution générale** de l'équation homogène :

$$\dot{z} - k(t)z = 0 \Rightarrow z = C_3 e^{k(t)}$$

**Solution particulière** de l'équation inhomogène

$$z(t) = \varphi(t) e^{k(t)} \Rightarrow \dots \Rightarrow z = C_1 k(t) e^{k(t)}$$

D'où la solution cherchée

$$z(t) = C_3 e^{k(t)} + C_1 k(t) e^{k(t)}$$

En posant  $e^{k(t)} = \tau$  on a

$$\Gamma : \begin{cases} x = C_1 \tau \\ y = \ln(C_1 \tau + C_2) \\ z = (C_1 \ln \tau + C_3) \tau \end{cases}$$

## 4.1 Champs vectoriels particuliers

### 4.1.1 Champ constant

$$\vec{q}(P) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

Les trajectoires sont des droites parallèles.

### 4.1.2 Champ central

Soit  $\vec{r} = (x, y, z)$  ; on a  $\|\vec{r}\| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Le champ vaut

$$\vec{q}(P) = \vec{q}(x, y, z) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = f(r) \vec{e}_r \quad \text{où} \quad \vec{e}_r = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

#### Exemple 4.2 Champ gravitationnel

Soit

$$\vec{q} = -\frac{\gamma}{r^2} \vec{e}_r = -\gamma \frac{(x, y, z)}{r^3}$$

on a

$$\|\vec{q}\| = \frac{\gamma}{r^2}$$

Les trajectoires sont des demi droites issues de  $O$ . En effet, soit  $\vec{r} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  le vecteur tangent à  $\Gamma$ , trajectoire du champ  $\vec{q} = \varphi(r)(x, y, z)$ . Résolvons le système

$$\vec{r} = k\varphi(r)\vec{r}, \quad \text{où} \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

On a par exemple

$$\dot{x} = k\varphi(r(t))x \Rightarrow \frac{dx}{x} = k\varphi(r(t))dt \Rightarrow \ln x = \Phi(t) + \alpha \Rightarrow x = ae^{\Phi(t)}$$

et de même pour  $y$  et  $z$ . On obtient ainsi :

$$\vec{r} = (a, b, c)e^{\Phi(t)} = \lambda(a, b, c) \quad \lambda > 0$$

C'est l'équation vectorielle d'une demi droite issue de  $O$ .

### 4.1.3 Champ $\vec{r}$ des vitesses

On veut calculer un champ  $\vec{r}$  des vitesses d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe passant par l'origine. Soit

$\vec{e}$  le vecteur directeur unitaire sur l'axe ;

$\omega$  la vitesse angulaire de rotation ;

$\delta$  la distance de  $P$  à l'axe  $a$ .

Or  $\vec{r}(P) \perp \text{plan}(OP, a)$ , c-à-d  $\vec{v} \perp \vec{e}$  et  $\vec{v} \perp \vec{r}$ . On a

$$\|\vec{v}\| = |\omega| \cdot \delta = |\omega| \cdot \|\vec{r}\| \sin \alpha = |\omega| \cdot \|\vec{r} \times \vec{e}\|$$

On pose  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$ . Alors  $\vec{v}$  est colinéaire  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ . On a donc

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{\omega} \times \vec{r}\| \Rightarrow \pm \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{selon le sens de rotation})$$

On a un résultat immédiat : les trajectoires sont des cercles situés dans des plans perpendiculaires à l'axe de rayon  $\delta$ .

### 4.1.4 Champ de gradient

Soit  $f(x, y, z)$  de classe  $C^1$  dans  $G$  ; si  $\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} f$  alors  $\vec{q}$  est dit *champ de gradient*.

- Tout champ constant  $\vec{q} = (\alpha, \beta, \gamma)$  est un champ gradient de la fonction  $f = \alpha x + \beta y + \gamma z$ .
- $\forall f \in C^1$  le champ central  $\vec{q} = f(r)\vec{e}_r$  est aussi un champ de gradient.
- Considérons  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  et supposons que  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ , alors  $\vec{v} = \omega(-y, x, 0)$ . Est-ce-que ce champ est un champ de gradient ? Existe-t-il une fonction  $\varphi$  tel que  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$  ?

$$\begin{cases} \varphi_x = -\omega y \\ \varphi_y = \omega x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{xy} = -\omega \\ \varphi_{yx} = \omega \end{cases} \Rightarrow \varphi_{xy} \neq \varphi_{yx}$$

Ce n'est pas un champ de gradient, car la condition d'intégration n'est pas vérifiée.

- Trouver  $F$  t.q.  $\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} F$ , avec  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ . On doit avoir :

$$\begin{cases} F_x = q_1 \\ F_y = q_2 \\ F_z = q_3 \end{cases}$$

On obtient

$$F = \int \overbrace{q_1}^{\alpha} dx + \theta(x, y)$$

avec

$$\theta(x, y) = \int \overbrace{(q_2 - \alpha_y)}^{\beta} dy \quad \text{et} \quad \theta(z) = \int (q_3 - \alpha_z - \beta_z) dz + c$$

# Chapitre 5

## Travail et circulation d'un champ vectoriel

Soient  $\vec{q}(P)$  un champ vectoriel dans  $G$  et  $\Gamma \subset G$  une courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

On note  $\vec{OP} = \vec{r}(t)$ ,  $\vec{OA} = \vec{r}(a)$ ,  $\vec{OB} = \vec{r}(b)$ .

Décomposons  $\Gamma$  en une suite de point  $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$  et considérons les segments (cordes)  $P_{k-1}P_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Formons les sommes de Riemann

$$\sum_{k=1}^n \vec{q}(P_{k-1}) \overrightarrow{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n [q_1(P_{k-1}) \Delta x_k + q_2(P_{k-1}) \Delta y_k + q_3(P_{k-1}) \Delta z_k]$$

Si les accroissements  $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  et que la limite de la série existe et est indépendante du choix de la suite  $\{P_k\}$ , alors elle vaut

$$\int_{(\Gamma)} [q_1(x, y, z) dx + q_2 dy + q_3 dz] = \int_{(\Gamma)} \vec{q}(dx, dy, dz) = \int_{t=a}^b \vec{q}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt = \int_a^b \vec{q}(t) \vec{r}'(t) dt$$

**Formule 5.1 (Intégrale curviligne).** *L'intégrale curviligne de A à B le long de  $\Gamma$  vaut*

$$\int_A^B \vec{q} d\vec{r} = \int_{a(t)}^{b(t)} \vec{q}(t) \vec{r}' dt$$

Cette intégrale définit *le travail* fourni par le champ  $\vec{q}$  le long d'une courbe  $\Gamma$  donnée.

*Remarque 5.1.* Le long de  $\Gamma$

$$\int_A^B \vec{q} d\vec{r} = - \int_B^A \vec{q} d\vec{r}$$

**Définition 5.1.** La *circulation* du champ  $\vec{q}$  le long d'une courbe  $\Gamma$  fermée et orientée est donnée par

$$\oint \vec{q} d\vec{r}$$

Remarque 5.2. La circulation ne dépend pas de l'origine choisi sur la courbe :

$$\oint_{A \rightarrow A} \vec{q} d\vec{r} = \oint_{A' \rightarrow A'} \vec{q} d\vec{r}$$

Supposons que  $\vec{q}$  soit un champ de gradient d'une fonction univoque  $\Phi$  (sans singularité)

$$\begin{aligned} \vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi &\Rightarrow \vec{q} d\vec{r} = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) \cdot (dx, dy, dz) = \Phi_x dx + \Phi_y dy + \Phi_z dz = d\Phi \\ &\Rightarrow \int_A^B \vec{q} d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} d\Phi = \Phi(x, y, z)|_{t_A}^{t_B} = \Phi_B - \Phi_A \\ &\Rightarrow \oint \vec{q} d\vec{r} = \Phi_B - \Phi_A = 0 \end{aligned}$$

Un champ gradient d'une fonction univoque a donc une circulation nulle le long de toute courbe fermée.

$\iff$

Le travail fourni par un champ de gradient d'une fonction univoque le long d'une courbe orientée quelconque ne dépend que des extrémités de la courbe.

### Exemple 5.1

Soit

$$\vec{q} = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

Ce champ est singulier car  $q_1$  et  $q_2$  ne sont pas définis en  $x = y = 0$ , donc  $Oz \notin D_{\vec{q}}$ .

Si  $\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$  alors  $\Phi_z = 0$ . D'où

$$\Phi = \Phi(x, y) \Rightarrow \begin{cases} \Phi_x = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \Phi_y = \frac{-x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$\Phi$  existe si la condition d'intégrabilité<sup>1</sup> est satisfaite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} &\stackrel{?}{=} \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Vrai  $\forall (x, y, z) \notin Oz$

Considérons

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$$

Aucun point de  $\gamma$  est sur  $Oz$ .

---


$$^1 \frac{\partial}{\partial y} \Phi_x = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_y$$



On a :

$$\begin{aligned}\vec{r}(t)dt &= (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ \vec{q}d\vec{r} &= \left(\frac{\sin t}{1}, -\frac{\cos t}{1}, 0\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt\end{aligned}$$

D'où

$$\oint \vec{q}d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} (-1) dt = -2\pi \neq 0, \text{ même si } \vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$$

Mais attention :  $\Phi$  n'est pas régulière partout !

**Théorème 5.1.** Seuls les champs de gradient d'une fonction univoque (régulière) ont une circulation nulle le long de toute courbe fermée.

**Formule 5.2.**

$$\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} F \Leftrightarrow \oint \vec{q}d\vec{r} = 0$$

**Exemple 5.2**

Soit le champ constant  $\vec{q} = (\alpha, \beta, \gamma)$ . On a

$$\begin{aligned}\int_A^B \vec{q}d\vec{r} &= \int_{t_1}^{t_2} (\alpha dx, \beta dy, \gamma dz) = \alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma z(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= (\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2) - (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) \\ &= \alpha(x_2 - x_1) + \beta(y_2 - y_1) + \gamma(z_2 - z_1) = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

**Exemple 5.3**

Soit  $\vec{q} = (y + yz^2, ax + xz^2, 2xyz^k)$ , avec  $k > 0$ . Calculer le travail de  $\vec{q}$  le long de  $\Gamma_1$  et de  $\Gamma_2$  :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t^3 \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

On a :

$$W_1 = \int_A^B \vec{q}d\vec{r} = \int_0^1 (t^2 + 0, at + 0, 0) \cdot (1, 2t, 0) dt = \int_0^1 (1 + 2a)t^2 dt = \frac{1}{3}(1 + 2a)$$

et

$$W_2 = \int_A^B \vec{q}d\vec{r} = \int_0^1 (t^3 + 0, at + 0, 0) \cdot (1, 3t^2, 0) dt = \int_0^1 (1 + 3a)t^3 dt = \frac{1}{4}(1 + 3a)$$

Pour que  $\vec{q}$  soit éventuellement un champ gradient on doit avoir  $W_1 = W_2$ , donc  $a = 1$ . Cette condition n'est pas suffisante : il faut aussi que  $k = 1$ .

**Remarque 5.3 (Additivité des circulations).** Les circulations sont additives :

$$\oint_{\Gamma} \vec{q}d\vec{r} = \oint_{\Gamma_1} \vec{q}d\vec{r} + \oint_{\Gamma_2} \vec{q}d\vec{r} + \oint_{\Gamma_3} \vec{q}d\vec{r}$$



# Chapitre 6

## Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

On a vu que les points  $P$  d'une surface  $S$  peuvent être définis à l'aide d'une représentation paramétrique  $\vec{r}(P) = \vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ . On a que les vecteurs normaux à  $S$  sont colinéaires à  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ . L'élément différentiel de surface est

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Si  $S$  est fermée on appelle *normale extérieure*  $\vec{n}$  la normale unitaire qui sort de la surface, c-à-d :

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

et on a donc

$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv = \vec{n} \cdot (\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|) du dv = \vec{n} dS$$

Lorsque  $S$  est donné en représentation cartésienne  $F(x, y, z)$  on a :

$$\vec{n} = \pm \frac{(F_x, F_y, F_z)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

### Exemple 6.1

Soit la surface sphérique  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ . On a

$$\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, z)}{R} = \frac{1}{R} \vec{r}$$

Soient  $S \subset D \subset \mathbb{R}^3$  et  $\vec{q}$  un champ vectoriel défini dans  $D$ . On partage  $D(u, v)$  décrivant  $S$  en  $m$  sous-domaines disjoints  $D_k$ , avec

$$D = \bigcup_{k=1}^m D_k \quad \text{et} \quad \text{Aire}(D_i \cap D_j) = 0, \quad i \neq j$$

Soit  $P_i \in S$ .  $\overrightarrow{OP_i} = \vec{r}(u_i, v_i)$  avec  $(u_i, v_i) \in D_i$ ,  $\Delta S_i = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|_i$ . On forme une «somme de Riemann» :

$$\sum_{i=1}^m q(P_i) \cdot \vec{n}|_{P_i} \Delta S_i$$

Si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m$$

existe pour toute aire  $D_i \rightarrow 0$ , on peut calculer cette somme, et on l'appelle le *flux*.

**Formule 6.1 (flux).** Le flux du champ  $\vec{q}$  à travers la surface  $S$  vaut

$$\Phi = \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{q}(u, v) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

**Formes particulières de  $\Phi$**

1. Si  $S$  est donnée par  $z = z(x, y)$ , alors  $dS = \sqrt{1 + \overrightarrow{\text{grad}}^2 z(x, y)} dx dy$  et

$$\Phi = \iint_{S'(x, y)} (\vec{q} \cdot \vec{n})|_{x, y, z(x, y)} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

2. Si on pose  $\vec{q} \cdot \vec{n} = q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3$  on a

$$\Phi = \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \rho_1 \iint_{(y, z)} q_1 dy dz + \rho_2 \iint_{(x, z)} q_2 dx dz + \rho_3 \iint_{(x, y)} q_3 dx dy$$

**Exemple 6.2**

Soient  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ( $x \geq 0, y \geq 0$  et  $z \leq 0$ ),  $\vec{q} = (1, -1, z)$  et  $\vec{n} = (x, y, z)$ .

**Méthode 1.** On pose

$$S = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \end{cases}$$

et  $S'$  le quart de cercle centrée en  $O$  et de rayon 1. On a

$$\begin{aligned} \vec{q} \cdot \vec{n} &= x - y + z^2 = x - y + 1 - (x^2 + y^2) \\ 1 + z_x^2 + z_y^2 &= 1 + \left( \frac{x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} \right)^2 = \frac{1}{1 - (x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{S'} [x - y + 1 - (x^2 + y^2)] \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} (\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi + 1 - \rho^2) \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho + \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho (1 - \rho^2)^{1/2} d\rho \\ &= \sin \varphi + \cos \varphi \Big|_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho + \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{3} \right) (1 - \rho^2)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

**Méthode 2.** Les 3 projections de  $S$  sont des quarts de cercles, avec l'orientation de  $\vec{n}$  qui vaut resp.  $\rho_1 = +1, \rho_2 = +1, \rho_3 = -1$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \rho_1 \iint_{(y,z)} q_1 \, dy \, dz + \rho_2 \iint_{(x,z)} q_2 \, dx \, dz + \rho_3 \iint_{(x,y)} q_3 \, dx \, dy = \\
 &= \iint_{\text{aire cercle}} 1 \, dy \, dz + \iint_{\text{quart cercle}} (-1) \, dx \, dz - \iint_{\text{quart cercle}} z \, dx \, dy = \\
 &= \frac{1}{4}\pi 1^2 - \frac{1}{4}\pi 1^2 - \iint -\sqrt{1-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \\
 &= \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$



# Chapitre 7

## Surfaces planes : formule de Riemann

Soit  $\partial D$  donné par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t', t'']$$

avec le point le plus bas  $B = (x(t'), y(t'))$  et le point le plus haut  $H = (x(T), y(T))$ , avec  $t' < T < t''$ . Après un tour on revient à  $B = (x(t''), y(t''))$ .

Soient  $f(x, y) \in C^1$  et  $g(x, y) \in C^1$  dans  $D$ . Alors

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dx dy &= \int_{y_B}^{y_H} dy \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) = \int_{y_B}^{y_H} [g(x_2(y), y) - g(x_1(y), y)] dy = \\ &= \int_{y_B}^{y_H} g(x_2, y) dy + \int_{y_B}^{y_H} g(x_1, y) dy = \int_{t'}^T g(x, y) \dot{y} dt + \int_T^{t''} g(x, y) dy = \\ &= \int_{t'}^{t''} g(x, y) \dot{y} dt = \oint_{\partial D} g(x, y) dy \end{aligned}$$

Considérons d'autre part

$$\partial D : \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases} \quad u \in [u', u'']$$

$$R = R(x(u'), y(u'))$$

$$L = R(x(U), y(U)) \quad u' < U < u''$$

$$R = R(x(u''), y(u''))$$

On a :

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int_{x_L}^{x_R} dx \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = \int_{x_L}^{x_R} [f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))] dx = \\ &= - \int_{x_L}^{x_R} f(x, y_2) dx - \int_{x_L}^{x_R} f(x, y_1) dx = - \int_{u'}^U f(x, y) \dot{x} dt - \int_U^{u''} f(x, y) dx = \\ &= - \int_{u'}^{u''} f(x, y) \dot{x} dt = - \oint_{\partial D} f(x, y) dx \end{aligned}$$

En combinant les deux résultats précédents on obtient la formule de Riemann.

**Formule 7.1 (Formule de Riemann).**

$$\oint_{\partial D} (f dx + g dy) = \iint_D \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

Si  $f dx + g dy = dF$  (différentielle totale) alors

$$\oint_{\partial D} dF = 0 \quad \forall \text{ chemin fermé } \partial D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

C'est la condition d'intégrabilité des formes différentielles  $f dx + g dy$ . Autrement dit si cette condition est satisfaite la circulation du champ  $\vec{q} = (f, g)$  est toujours nulle.

**Exemple 7.1**

Soit  $\Gamma$  une courbe fermée entourant l'origine d'équation polaire  $\rho = \rho(\varphi)$ . Calculer

$$C = \oint_{\Gamma=\partial D} \vec{q} \cdot d\vec{r}$$

si  $\vec{q} = (4x^2y^3 - 3x^4y, 3xy^4 + 6x^3y^2)$ . On a

$$\begin{aligned} C &= \iint_D \left( \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_D (3y^4 + 18x^2y^2 - 12x^2y^2 + 3x^4) dx dy = \\ &= \iint_D 3(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) dx dy = \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{\rho(\varphi)} 3\rho^4 \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^6(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

**Conséquences**

1. Admettons que  $\partial D$  soit paramétré par sa coordonnée curviligne. En choisissant  $f = g$  on obtient

$$\iint_D \overrightarrow{\text{grad}} f dx dy = \oint_{\partial D} f(x, y) \vec{n} dS$$

2. Soient  $f = -q_2$  et  $g = q_1$ . La circulation de  $\vec{q}$  sur le bord de  $D$  s'écrit

$$\oint_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \left( \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) dx dy$$

3. Si  $f = -y$  et  $g = x$ , on a

$$\text{aire de } D = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x dy - y dx)$$

La circulation du champ  $\vec{q} = (-y, x)$  le long de la frontière d'un domaine fermé est égale à 2 fois l'aire du domaine.



## Chapitre 8

### Surfaces dans l'espace : formule de Stokes et rotationnel

Soient  $\vec{q} = (q_1(x, y, z), q_2(x, y, z), q_3(x, y, z))$  un champ vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$  et  $G$  un domaine fermé dans un plan  $\pi$  quelconque. On cherche à transformer

$$\oint_{\partial D} \vec{q} d\vec{r}$$

On a dans un système  $Oxyz$  (pour  $\vec{v}$  quelconque)  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$  et, dans le système orthonormé  $OXYZ$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{I} + v_2\vec{J} + v_3\vec{K}$ , donc  $v_1 = \vec{v} \cdot \vec{I}$ .

Dans ce même système, la circulation de  $\vec{q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$  est

$$\oint_{\partial G} (Q_1 dX + Q_2 dY + Q_3 dZ) = \oint_{\partial G} (Q_1 dX + Q_2 dY) = \iint_G \left( \frac{\partial Q_2}{\partial X} - \frac{\partial Q_1}{\partial Y} \right) dX dY$$

Soit  $\Phi(x, y, z) \in C^1$  ;  $\Phi(x, y, z) = \widetilde{\Phi}(X, Y, Z)$ . On a

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial X} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} x_X + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y_X + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z_X$$

et de même pour  $\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial Y}$  et  $\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial Z}$ .

Or  $\forall P \in \mathbb{R}^3$ ,  $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$ . On a donc

$$\begin{aligned} x &= (X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}) \cdot \vec{i} = XI_1 + YJ_1 + ZK_1 \\ y &= (X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}) \cdot \vec{j} = XI_2 + YJ_2 + ZK_2 \\ z &= (X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}) \cdot \vec{k} = XI_3 + YJ_3 + ZK_3 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial X} &= I_1, & \frac{\partial x}{\partial Y} &= J_1, & \frac{\partial x}{\partial Z} &= K_1 \\ \frac{\partial y}{\partial X} &= I_2, & \frac{\partial y}{\partial Y} &= J_2, & \frac{\partial y}{\partial Z} &= K_2 \\ \frac{\partial z}{\partial X} &= I_3, & \frac{\partial z}{\partial Y} &= J_3, & \frac{\partial z}{\partial Z} &= K_3\end{aligned}$$

et encore

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial x}I_1 + \frac{\partial}{\partial y}I_2 + \frac{\partial}{\partial z}I_3 \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial x}J_1 + \frac{\partial}{\partial y}J_2 + \frac{\partial}{\partial z}J_3 \\ \frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial x}K_1 + \frac{\partial}{\partial y}K_2 + \frac{\partial}{\partial z}K_3\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_2}{\partial X} - \frac{\partial Q_1}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{q} \cdot \vec{J}) - \frac{\partial}{\partial y}(\vec{q} \cdot \vec{I}) = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}I_1 + \frac{\partial}{\partial y}I_2 + \frac{\partial}{\partial z}I_3 \right) (q_1J_1 + q_2J_2 + q_3J_3) \\ &\quad - \left( \frac{\partial}{\partial x}J_1 + \frac{\partial}{\partial y}J_2 + \frac{\partial}{\partial z}J_3 \right) (q_1I_1 + q_2I_2 + q_3I_3) = \\ &= (I_1J_2 - I_2J_1) \left( \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) \\ &\quad + (I_1J_3 - I_3J_1) \left( \frac{\partial q_3}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial z} \right) \\ &\quad + (I_2J_3 - I_3J_2) \left( \frac{\partial q_3}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Comme le vecteur normal unitaire à  $G$  est égale au vecteur normal à  $\pi$  :  $\vec{n} = \vec{I} \times \vec{K} = \vec{K}$ . On obtient ainsi

$$\frac{\partial Q_2}{\partial X} - \frac{\partial Q_1}{\partial Y} = n_1 \left( \frac{\partial q_3}{\partial x} - \frac{\partial q_2}{\partial z} \right) + n_2 \left( \frac{\partial q_1}{\partial z} - \frac{\partial q_3}{\partial x} \right) + n_3 \left( \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right)$$

**Définition 8.1 (Rotationnel).** On appelle  $\vec{\text{rot}} q$  le rotationnel du champ  $\vec{q}$

$$\vec{\text{rot}} q = \left( \frac{\partial q_3}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial z}, \frac{\partial q_1}{\partial z} - \frac{\partial q_3}{\partial x}, \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

**Definition 8.2.** Soit  $\vec{\nabla}$  l'opérateur différentiel défini par

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

En combinant ces deux définitions on obtient

**Formule 8.1.**

$$\vec{\text{rot}} q = \vec{\nabla} \times \vec{q}$$

## 8.1 Généralisation à une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ quelconque

Les circulations étant additives, on peut écrire, en approximant une très petite portion de surface à une surface plane

**Formule 8.2 (Stokes).**

$$\oint_{\partial S} \vec{q} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\text{rot}} q \cdot \vec{n} dS$$

La circulation de  $\vec{q}$  est égale au flux du rotationnel à travers  $S$ .

**Definition 8.3.**  $\vec{\text{rot}} q$  est appelé «vecteur tourbillon».

Supposons que  $S$  soit un petit domaine entourant le point  $P \in S$ . Par le théorème de la moyenne on a

$$\oint_{\partial S} \vec{q} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\text{rot}} q \cdot \vec{n} dS = (\vec{\text{rot}} q \cdot \vec{n})|_{Q \in S} \iint_S dS$$

et à la limite

**Formule 8.3.**

$$\underbrace{(\vec{\text{rot}} q \cdot \vec{n})|_P}_{\text{proj de } \vec{\text{rot}} q \text{ sur } \vec{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{S} \oint_{\partial S} \vec{q} \cdot d\vec{r}}_{\text{tourbillon spécifique}}$$

### 8.1.1 Conséquences

1. Si  $\vec{q} = \vec{\text{grad}} \Phi$ , la circulation est nulle  $\forall \partial S$  :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} \Phi = \vec{0}$$

On peut écrire

$$\vec{\text{grad}} \Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \vec{\nabla} \Phi$$

donc

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = \vec{0} \quad \forall \Phi(x, y, z)$$

Pour déterminer si  $\vec{q}$  est un champ de gradient, on calcule  $\vec{\text{rot}} q$ .

2. Considérons les spirales

$$\Gamma : \begin{cases} \rho = ke^{-m\varphi} \\ z = 0 \end{cases}, \quad m > 0$$

On peut écrire  $\Gamma$  et sa dérivée sous la forme

$$\Gamma : \begin{cases} x = ke^{-m\varphi} \cos \varphi \\ y = ke^{-m\varphi} \sin \varphi \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = ke^{-m\varphi}(-m \cos \varphi - \sin \varphi) \\ \dot{y} = ke^{-m\varphi}(-m \sin \varphi + \cos \varphi) \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Champ de vitesses  $\vec{q} = (-mx - y, -my + x, 0)$ . On a

$$\vec{\text{rot}} q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -mx - y & -my + x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 + 1) = (0, 0, 2) \sim (0, 0, 1) \perp \text{plan } z = 0$$

3. Soit  $\vec{q} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , où  $\omega$  est un vecteur constant. On a

$$\vec{\text{rot}} q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_2 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\vec{\omega}$$

Ainsi de  $\vec{q} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  on «extrait» le vecteur axe de rotation en calculant  $\frac{1}{2} \vec{\text{rot}} q$ , et on obtient :

$$\oint_{\partial S} \vec{r} \times d\vec{r} = 2 \iint_S \vec{n} dS$$

4. Si  $S$  est une surface fermée, alors  $\partial S = \emptyset$ . La formule précédente implique

$$\exists \iint_S \vec{n} dS = \vec{0} \quad \forall \text{ surface fermée}$$

**Interprétation physique :** un corps solide  $G$  subit sur toute sa surface une pression uniforme d'intensité  $p_0$ . Quelle est la résultante des forces  $\vec{F}$  ?

$$\vec{F} = \iint_{S=\partial G} (-p_0 \vec{n}) dS = -p_0 \iint_{S=\partial G} \vec{n} dS = \vec{0}$$

La résultante est donc nulle.

Revenons à la formule générale de Stokes (Formule 8.2)

(a) Le flux de  $\vec{\text{rot}} q$  à travers  $S$  ne dépend que du contour  $\partial S$ . Il s'ensuit que si  $\partial S_1 = \partial S_2$  (de même orientation), on a :

$$\iint_{S=S_1 \cup S_2} \vec{\text{rot}} q \cdot \vec{n} dS = 0$$

Donc le flux de  $\vec{\text{rot}} q$  à travers une surface fermée  $S = \partial G$  est nul.

$\Rightarrow$  la quantité de fluide entrant est égale à la quantité de fluide sortant.

On dit qu'il n'y a pas de sources dans  $G$  pour un champ de rotationnel.

- (b) i. Si  $\vec{q} \cdot d\vec{r}$  est une différentielle totale on a  $\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ . Alors  $\overrightarrow{\text{rot}} q = \vec{0}$ .  
 ii. Réciproquement, si  $\overrightarrow{\text{rot}} q = \vec{0}$  dans  $G \subset \mathbb{R}^3$  et  $\Gamma = dS$  est la frontière (fermée) d'une surface  $S \subset G$  alors

$$\oint_{\partial S} \vec{q} \cdot d\vec{r} = 0$$

Ceci est vrai pour tout domaine  $G$  simplement connexe.

### Exemple 8.1

Soit  $G = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z)\}$  et  $\vec{q} = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \varphi(x, y), \frac{x}{x^2 + y^2} \varphi(x, y), z \right)$  où  $\varphi$  est l'angle polaire  $\in [0, 2\pi[$  entre  $Ox$  et  $P'(x, y, 0)$ .  $\vec{q}$  est défini partout dans  $G$ . Soit

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

On ne peut pas déformer  $\Gamma$  pour le réduire au point  $P$  sans sortir de  $G$ .

$$\Gamma = \partial S \quad \begin{cases} x = 2 \cos \varphi \\ y = 2 \sin \varphi \\ z = 1 \end{cases} ; \quad \forall P \notin Oz; \quad \overrightarrow{\text{rot}} q = \left( 0, 0, \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \arctan \left( \frac{x}{y} \right) \right) = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \arctan \left( \frac{x}{y} \right) - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ -\frac{\partial q_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \arctan \left( \frac{y}{x} \right) - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} \overrightarrow{\text{rot}} q = \vec{0}$$

Cependant

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{q} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-2 \sin \varphi}{4} \varphi, \frac{2 \cos \varphi}{4} \varphi, 1 \right) \cdot (-2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi, 0) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \varphi^2 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 \end{aligned}$$



# Chapitre 9

## Domaines dans l'espace : formules de Gauss et divergence

### 9.1 Première formule de Gauss

Soit  $f(x, y, z) \in C^1$  dans  $\overline{G} = G \cup \partial G$  ( $G$  fermé).  
Considérons l'intégrale

$$\begin{aligned}\iiint_G \frac{\partial f}{\partial z} dV &= \iint_{G'} dx dy \int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{G'} [f(x, y, z_2(x,y)) - f(x, y, z_1(x,y))] dx dy = \\ &= \iint_{G'} f(x, y, z_2(x,y)) dx dy + \iint_{G'} f(x, y, z_1(x,y)) (-dx dy)\end{aligned}$$

d'où

$$\iiint_G \frac{\partial f}{\partial z} dV = \oiint_{\partial G} f(x, y, z) n_3 dS$$

Ainsi

$$\iiint_G \frac{\partial f}{\partial z} dV = \iiint_G \vec{k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f dV = \oiint_{\partial G} f n_3 dS = \oiint_{\partial G} f \vec{k} \cdot \vec{n} dS$$

d'où

$$\begin{aligned}\vec{k} \iiint_G \overrightarrow{\text{grad}} f dV &= \vec{k} \oiint_{\partial G} f \vec{n} dS \\ \Leftrightarrow \vec{k} \left[ \iiint_G \overrightarrow{\text{grad}} f dV - \oiint_{\partial G} f \vec{n} dS \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{k} \vec{\omega} = 0 = \omega_3\end{aligned}$$

Avec les directions  $Ox$  et  $Oy$ , on obtient  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \vec{0}$ .

**Formule 9.1 (Gauss (I)).**

$$\iiint_G \overrightarrow{\text{grad}} f \, dV = \oint_{\partial G} f \vec{n} \, dS$$

En utilisant le théorème de la moyenne on obtient la caractérisation :

**Formule 9.2 (Gauss (I), caractérisation).**

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \Big|_{P \in G} = \lim_{V_G \rightarrow 0} \frac{1}{V_G} \oint_{\partial G} f \vec{n} \, dS$$

**Application**

En utilisant la formule 9.1 et les relations analogues pour les directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \iiint_G \left( \frac{\partial q_3}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial z} \right) &= \oint_{\partial G} (q_3 n_2 - q_2 n_3) \, dS \\ \iiint_G \left( \frac{\partial q_1}{\partial z} - \frac{\partial q_3}{\partial x} \right) &= \oint_{\partial G} (q_1 n_3 - q_3 n_1) \, dS \\ \iiint_G \left( \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) &= \oint_{\partial G} (q_2 n_1 - q_1 n_2) \, dS \end{aligned}$$

**Formule 9.3.**

$$\iiint_G \text{rot } \vec{q} \cdot dV = \oint_{\partial G} (\vec{n} \times \vec{q}) \, dS$$

D'où, comme pour la formule 9.2

**Formule 9.4.**

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \Big|_{P \in G} = \lim_{V_G \rightarrow 0} \frac{1}{V_G} \oint_{\partial G} (\vec{n} \times \vec{q}) \, dS$$

## 9.2 Seconde formule de Gauss (divergence)

On a

$$\oint_{\partial G} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\partial} (q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3) \, dS = \iiint_G \left( \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z} \right) dV$$

**Définition 9.1.** On appelle le scalaire  $\text{div } \vec{q}$  la divergence du champ  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$

$$\text{div } \vec{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z}$$

ou

$$\text{div } \vec{q} = \vec{\nabla} \cdot \vec{q}$$



D'où

**Formule 9.5 (Gauss (II)).**

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{q} dV = \oiint \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

et la caractérisation

**Formule 9.6 (Gauss (II), caractérisation).**

$$\operatorname{div} \vec{q}|_{P \in G} = \lim_{V_G \rightarrow 0} \frac{1}{V_G} \oiint \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

*C'est la source spécifique. Si  $\operatorname{div} \vec{q}|_P < 0$ , on parle parfois de puits.*

Ainsi s'il n'y a pas de sources dans  $G$  (c-à-d  $\operatorname{div} \vec{q} = 0$ ), le flux à travers  $\partial G$  est nul. De manière générale les champs de divergence nulle sont ceux dont le flux à travers une surface fermée est nul. On a

$$\text{si } \operatorname{div} \vec{q} = 0, \text{ alors } \iint \vec{q} \cdot \vec{n} dS \text{ ne dépend que de } \partial S$$

En effet

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{q} dV = 0 = \oiint \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{q} \cdot \vec{n} dS - \iint_{S_2} \frac{\vec{q} \cdot (-\vec{n})}{1} dS$$

d'où

$$\iint_{S_2} \vec{q} \cdot \vec{n}' dS = \iint_{S_1} \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

où  $S_1$  et  $S_2$  ont le même bord.

**Définition 9.2.**  $\vec{q}$  est un champ vectoriel solénoïdal si  $\operatorname{div} \vec{q} = 0$ .

### 9.2.1 Conséquences

1. Soit  $\vec{q} = \vec{\operatorname{rot}} \omega$ , alors

$$\iiint_G \operatorname{div} (\vec{\operatorname{rot}} \omega) dV = \oiint_{\partial G = \Sigma} \vec{\operatorname{rot}} \omega \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial \Sigma \neq \emptyset} \vec{\omega} \cdot d\vec{r} = 0$$

Comme  $G$  est arbitraire, on a  $\operatorname{div} (\vec{\operatorname{rot}} \omega) = 0$ .

2. Tout champ vectoriel (de classe  $C^1$ ) dont la divergence est nul (champ solénoïdal) est localement un champ de rotationnel.

$$\operatorname{div} \vec{q} = 0 \Leftrightarrow \vec{q} = \vec{\operatorname{rot}} \omega$$

Montrons qu'on peut trouver  $\vec{\omega}$  de la forme (particulière)  $(\omega_1, \omega_2, 0)$ . En effet

$$\vec{\text{rot}} \omega = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial \omega_2}{\partial z}, \frac{\partial \omega_1}{\partial z}, \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)$$

On doit avoir :

(a)

$$-\frac{\partial \omega_2}{\partial z} = q_1 \Rightarrow \omega_2 = - \int_{z_0}^z q_1(x, y, z) dz + \theta(x, y)$$

(b)

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = q_2 \Rightarrow \omega_1 = - \int_{z_0}^z q_2(x, y, z) dz$$

(c)

$$\begin{aligned} q_3(x, y, z) &= \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right) = \int_{z_0}^z \left[ -\frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{\partial q_2}{\partial y} \right] dz + \theta_x(x, y) \\ &= \int_{z_0}^z \frac{\partial q_3}{\partial z} dz + \theta_x(x, y) = q_3(x, y, z) - q_3(x, y, z_0) + \theta_x(x, y) \\ &\Rightarrow 0 = -q_3(x, y, z_0) + \theta_x \\ &\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = q_3(x, y, z_0) \\ &\Rightarrow \theta = \int_{x_0}^x q_3(x, y, z_0) dx \\ &\text{p. ex.} \end{aligned}$$

D'où la solution possible :

$$\vec{\omega} = \left( \int_{z_0}^z q_2(x, y, z) dz, \int_{x_0}^x q_3(x, y, z_0) dx - \int_{z_0}^z q_1(x, y, z) dz, 0 \right)$$

Comment trouver la solution générale ? Supposons que  $\omega$  soit tel que

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \omega &= \vec{q} = \vec{\text{rot}} w \\ \Rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{\omega}^* - \vec{\omega}) &= \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{\omega}^* - \vec{\omega} &= \vec{\text{grad}} \Phi \quad \text{où } \Phi \text{ est arbitraire} \\ \Rightarrow \vec{\omega}^* &= \omega + \vec{\text{grad}} \Phi \end{aligned}$$

### Exemple 9.1

Soit  $\vec{q} = (2x, -3y, 2x + z)$ . Trouver un champ  $\omega$  tel que  $\vec{\text{rot}} \omega = \vec{q}$ .

(a)  $\text{div} \vec{q} = 2 - 3 + 1 = 0$  ;

(b) Par la formule ( $x_0 = 0$  et  $z_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_0 &= \left( \int_0^z (-3y) dz, \int_0^x 2x + z|_{z=0} dx - \int_0^z 2x dz, 0 \right) = \\ &= (-3yz, x^2 - 2xz, 0) \end{aligned}$$

Mais on a aussi ( $x_0 = 0$  et  $z_0 = 1$ )

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_1 &= \left( \int_1^z (-3y) dz, \int_0^x 2x + z|_{z=1} dx - \int_1^z 2x dz, 0 \right) = \\ &= (-3yz + 3y, x^2 - 2xz + 3x, 0)\end{aligned}$$

Et on a

$$\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_0 = (3y, 3x, 0) = \overrightarrow{\text{grad}}(3xy)$$

### Applications du théorème de Gauss

**Formule 9.7.** Soit  $\vec{q} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z) = \vec{r}$  alors

$$\oiint_{\partial G} \vec{r} \cdot \vec{n} dS = \iiint_G \text{div} \vec{r} dV = 3V_G$$

#### Exemple 9.2

Soit  $G$  un cône de sommet  $O$  et de base  $D$  dans le plan  $z = h$ . Alors

$$\begin{aligned}3V_G &= \oiint_{\partial G} \vec{r} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\text{surf. latérale}} \vec{r} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\text{base } z=h} \vec{r} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_{\text{surf. latérale}} \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\text{base}} dS\end{aligned}$$

Or  $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 0$  car le vecteur  $\vec{n}$  est perpendiculaire au plan tangent et  $\overrightarrow{OP}$  est une génératrice contenue dans le plan tangent (donc  $\vec{n} \perp \overrightarrow{OP}$ ). D'où

$$V_G = \frac{h - (\text{Aire de base})}{3}$$

#### Exemple 9.3

Calculer le flux du champ  $\vec{q} = (x^3, y^3, z^3 + 1)$  à travers la surface

$S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$ .

**Directement**

$$\begin{aligned}F &= \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS \\ &= \frac{1}{R} \iint_S (x^3, y^3, z^3 + 1) \cdot (x, y, z) dS \\ &= \frac{1}{R} \iint_S (x^4, y^4, z^4 + z) dS \\ &= R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (R^4 \sin^5 \theta \cos^4 \varphi + R^4 \sin^5 \theta \sin^4 \varphi + R^4 \cos^4 \theta \sin \theta + R \cos \theta \sin \theta) d\theta d\varphi = \\ &= \dots\end{aligned}$$

Avec la méthode directe on a des calculs trop complexes !!!

**En utilisant le théorème de Gauss**

$$\begin{aligned}
 \oiint_{\Sigma=\partial G=S\cup E} \vec{q} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_G \operatorname{div} \vec{q} dV = \iiint_G (3x^2, 3y^2, 3z^2) dV \\
 &= \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} 3r^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
 &= 3 \cdot 2\pi \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{6\pi R^5}{5} \\
 \Rightarrow \frac{6\pi R^5}{5} &= F + \iint (x^3, y^3, 1) \cdot (0, 0, -1) dx dy \\
 \Rightarrow F &= \frac{6\pi}{5} R^5 + \pi R^2
 \end{aligned}$$

# Chapitre 10

## Combinaison entre les opérateurs grad, div et rot

### 10.1 Petit rappel

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \vec{\nabla} f &= \overrightarrow{\text{grad}} f \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{q} &= \text{div } \vec{q} \\ \vec{\nabla} \times \vec{q} &= \overrightarrow{\text{rot}} q\end{aligned}$$

### 10.2 Sommes

On obtient sans peine :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f+g) &= \overrightarrow{\text{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \text{div}(\vec{v} + \vec{w}) = \text{div}(\vec{v}) + \text{div}(\vec{w}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot \vec{w} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{w}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla} \times \vec{w}\end{aligned}$$

### 10.3 Produits

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(fg) &= g \overrightarrow{\text{grad}} f + f \overrightarrow{\text{grad}} g \\ \vec{\nabla}(fg) &= g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g \\ \text{div}(f\vec{v}) &= \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} f + f \text{div } \vec{v} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{v}) &= \overrightarrow{\text{grad}} f \times \vec{v} + f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}\end{aligned}$$

**Application**

Soit  $\vec{q}$  pas égale à un champ de gradient. Si  $\exists f (\neq 0)$  ( $f$  composé par des facteurs intégrables) tel que  $f\vec{q}$  soit égale à un champ de gradient, alors  $\vec{q}$  doit satisfaire la relation (condition nécessaire)  $\vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} q = 0$ .

**Exemple 10.1**

Soit  $\vec{q} = (y^2z, z + xyz, y)$ . On a

$$\overrightarrow{\text{rot}} q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z & z + xyz & y \end{vmatrix} = (-xy, y^2, -yz) \neq \vec{0}$$

mais ici on a  $\vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} q = 0$ .

Pour cet exemple  $\exists f = e^{xy} \Rightarrow e^{xy}\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} (yze^{xy})$

**10.4 Produits vectoriels**

$$\begin{aligned} \text{div} (\vec{v} \times \vec{\omega}) &= -\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \omega + \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} v \\ \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{v} \times \vec{\omega}) &= (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} + \vec{v} \text{div} \vec{\omega} - \vec{\omega} \text{div} \vec{v} \end{aligned}$$

**10.5 Composition d'opérateurs**

$$\begin{aligned} \text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} v) &= 0 \\ \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} f) &= \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \Delta f \\ \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} f) &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} v) &= \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

**Exemple 10.2**

Calculer  $C = \text{div} (f \overrightarrow{\text{grad}} g - g \overrightarrow{\text{grad}} f)$ .

$$\begin{aligned} C &= \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g + f \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} g) - \overrightarrow{\text{grad}} g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f - g \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} f) \\ &= f \Delta g - g \Delta f \end{aligned}$$

**Définition 10.1.**  $u(x, y, z)$  est une fonction harmonique si  $\Delta u = 0$ .

Ainsi si  $u$  est harmonique, le champ  $\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} u$  n'a ni tourbillon, ni sources, puisque  $\overrightarrow{\text{rot}} q = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} u = \vec{0}$  et  $\text{div} q = \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} u) = \Delta u = 0$ .

# Chapitre 11

## Formules de Green et intégrale de Dirichlet

**Definition 11.1.** On appelle *dérivée normale* l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{n}$$

C'est la dérivée directionnelle le long de la normale.

Soit  $f(x, y, z)$  donnée, introduisons les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

et notons  $\tilde{f}(r, \theta, \varphi) = f(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi))$ . On a

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \overrightarrow{\text{grad}} f \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

En particulier, sur une surface sphérique  $S : x^2 + y^2 + z^2 = C$ ,  $\vec{n}_S = \left( \frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right)$  d'où

$$\left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \right|_{r=R} = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{n}_S = \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_S$$

c-à-d que sur la sphère on a

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

On a aussi

$$\text{div} \left( f \overrightarrow{\text{grad}} g \right) = \overrightarrow{\text{grad}} g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f + f \underbrace{\text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} g \right)}_{\Delta g}$$

Alors, pour un domaine fermé  $G \subset R^3$  on a

$$\begin{aligned} \iiint_G (\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g + f \Delta g) dV &= \iiint_G \text{div} (f \overrightarrow{\text{grad}} g) dV \\ &= \oiint_{\partial G} f \overrightarrow{\text{grad}} g \cdot \vec{n} dS \\ &= \oiint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial n} dS \end{aligned}$$

d'où

**Formule 11.1 (1ère formule de Green).**

$$\oiint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iiint_G \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g dV + \iiint_G f \Delta g dV$$

En permutant  $f$  et  $g$  et par soustraction on obtient :

**Formule 11.2 (2ème formule de Green).**

$$\oiint_{\partial G} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iiint_G (f \Delta g - g \Delta f) dV$$

## 11.1 Conséquences

1. Posons, dans la formule de Green (11.1),  $f = 1$  et soit  $g$  une fonction harmonique,  $g = u$  ( $\Delta u = 0$ ) ; on obtient

$$\oiint_{\partial G} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - u \right) dS = \iiint_G (0 - u_0) dV$$

d'où

$$\oiint_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad \forall \text{ fonction harmonique dans } G$$

le champ  $\overrightarrow{\text{grad}} u$  n'a pas de source dans  $G$ .

2. Posons dans la formule de Green,  $f = g = u$  harmonique ( $\Delta u = 0$ ) ; on obtient l'intégrale de Dirichlet de la fonction  $u$  :

**Formule 11.3 (Intégrale de Dirichlet).**

$$\oiint_{\partial G} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_G \overrightarrow{\text{grad}}^2 u dV = \mathcal{D}(u)$$



### 3. Unicité du problème de Dirichlet

Soit  $G \subset \mathbb{R}^3$  ; on cherche  $u(x, y, z)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } G \\ u = f(P) & \text{donné sur } \partial G (P(x, y, z) \in \partial G) \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique. De plus si  $\Delta u = 0$  on a  $u = 0$ .

#### Exemple 11.1

Soit

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans la boule } B \text{ de rayon } R \\ u(P) = \text{somme des coordonnées de } P \in \partial B \end{cases}$$

$\forall P \in \partial B$  on a  $u(x, y, z) = x + y + z$ .

On remarque ( $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ )  $\Delta(x + y + z) = 0$ , et on peut en déduire que  $u = x + y + z$  d'où  $u(x, y, z) = x + y + z$  est la solution.

### 4. Théorème de la moyenne des fonctions harmoniques

Soient  $u$  une fonction harmonique que l'on exprime en coordonnées sphériques  $u(r, \theta, \varphi)$  et  $B$  une boule de rayon  $R$  centré en  $O$ . Notons  $\partial B = S$  ( $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = R^2 d\Sigma$ ) et considérons la fonction de  $R$  définie par

$$I(R) = \frac{1}{R^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} u(R, \theta, \varphi) dS = \iint_{(\theta, \varphi)} u(R, \theta, \varphi) d\Sigma$$

Alors

$$I(R+h) - I(R) = \iint_{(\theta, \varphi)} [u(R+h, \theta, \varphi) - u(R, \theta, \varphi)] d\Sigma = \iint_{(\theta, \varphi)} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{R'}^h d\Sigma$$

avec  $R < R' < R+h$ .

Donc

$$\frac{I(R+h) - I(R)}{h} = \iint_{(\theta, \varphi)} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{R'} d\Sigma$$

d'où

$$\begin{aligned} I'(R) &= \iint_{(\theta, \varphi)} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_R d\Sigma = \frac{1}{R^2} \iint_{(\theta, \varphi)} \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_R dS = \frac{1}{R^2} \oiint_{S=\partial B} \overrightarrow{\text{grad}} u \cdot \vec{n} dS \\ &= \iiint_B \underbrace{\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} u)}_{\Delta u=0} dV \end{aligned}$$

Ainsi  $I'(R) = 0$ , donc  $I(R) = \text{cte}$  ; il s'ensuit que  $I$  ne dépend pas de  $R$  et par conséquent

$$\frac{1}{4\pi} I(R) = \frac{1}{4\pi} I(\tilde{R})$$

d'où

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(R, \theta, \varphi) dS = \frac{1}{4\pi \tilde{R}^2} \iint_{\tilde{S}} u(\tilde{R}, \theta, \varphi) d\tilde{S}$$

c-à-d la valeur moyenne d'une fonction harmonique  $u$  est la même sur chaque sphère concentrique.

En particulier si  $\tilde{R} \rightarrow 0$ , cette valeur moyenne est la valeur au centre. D'où

$$u(O) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u dS \quad \text{si } \Delta u = 0$$

Si le centre est le point  $C$  alors

$$u(C) = \frac{1}{4\pi R_{CP}^2} \iint_S u(x, y, z) dS$$

*Remarque 11.1.* Une fonction harmonique  $u$  (pas constante) dans  $G$  atteint son maximum et son minimum seulement sur  $\partial G$ .

### Exemple 11.2

Soit  $f(x, y, z) = 3x^2 - y^2 + z^2 + xz + 1$  et  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ( $R = 1$ ). Calculer

$$I = \iint_S f(x, y, z) dS$$

On a

$$\begin{aligned} f &= \overbrace{3x^2 - y^2 - 2z^2 + xz + 1}^{u(x, y, z)} + 3z^2 \\ \Delta u &= 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \iint_S f dS = 4\pi u(0, 0, 0) + 3 \iint_S z^2 dS \\ &= 4\pi \cdot 1 + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} 3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 4\pi + 2\pi \left( -\cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi} = 8\pi \end{aligned}$$

# Chapitre 12

## Coordonnées curvilignes orthogonales

### 12.1 Éléments différentiels de longueur, d'aire et de volume

Considérons la transformation de  $R^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

supposé régulière. Le jacobien correspondant vaut

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

d'où

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}$$

Fixons dans le premier système l'une des grandeurs, p. ex.  $u = u_0$  ; alors ce système représente une surface de l'espace paramétrée par  $v, w$ .

Si l'on pose  $u = u_0$  et  $v = v_0$  ce système représente une courbe.

Considérons  $P_0(u_0, v_0, w_0)$  et soient  $\Gamma^{(u)}$ ,  $\Gamma^{(v)}$  et  $\Gamma^{(w)}$  resp. les courbes paramétriques par  $u, v$  et  $w$  resp. Ces courbes se coupent en  $P_0$  et en ce point les vecteurs tangents aux  $\Gamma^{(i)}$  sont données resp. par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} &= \vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)|_{P_0} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)|_{P_0} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} &= \vec{r}_w = (x_w, y_w, z_w)|_{P_0} \end{aligned}$$

Supposons alors que ces vecteurs soient orthogonaux (c-à-d les arêtes  $\Gamma^{(i)}$  sont orthogonales). On a

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_w = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_w = 0$$

Calculons  $dS^2$  :

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_u^2 du^2 + H_v^2 dv^2 + H_w^2 dw^2$$

où par convention  $H_u^2 = \vec{r}_u^2$ ,  $H_v^2 = \vec{r}_v^2$  et  $H_w^2 = \vec{r}_w^2$ .

L'élément différentiel de la surface  $S(u, v)$  est donné par

$$dS_{(u,v)} = H_u H_v du dv$$

Enfin l'élément différentiel de volume ( $\sim$  cube) est le produit des longueurs  $dS$  sur chaque arête :

$$dS_{\Gamma(u)} = H_u du$$

$$dS_{\Gamma(v)} = H_v dv$$

$$dS_{\Gamma(w)} = H_w dw$$

d'où

$$dV = H_u H_v H_w du dv dw$$

### Exemple 12.1 Coordonnées sphériques

Soit

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} \vec{r}_r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \vec{r}_\theta = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) \\ \vec{r}_\varphi = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{cases}$$

On a ici,  $\vec{r}_r \cdot \vec{r}_\theta = 0$ ,  $\vec{r}_r \cdot \vec{r}_\varphi = 0$  et  $\vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\varphi = 0$ .

De plus

$$H_r^2 = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\|^2 = 1$$

$$H_\theta^2 = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\|^2 = r^2$$

$$H_\varphi^2 = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\|^2 = r^2 \sin^2 \theta$$

d'où

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

et

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

## 12.2 Expressions du gradient, div et $\Delta$ en coordonnées curvilignes

### 12.2.1 Gradient

Soit  $\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi(x, y, z)$ . Dans le système  $(u, v, w)$  les composantes de  $\vec{q}$  sont

$$\begin{aligned} q_{(u)} &= \vec{q} \cdot \vec{e}_u \\ q_{(v)} &= \vec{q} \cdot \vec{e}_v \\ q_{(w)} &= \vec{q} \cdot \vec{e}_w \end{aligned}$$

où  $\vec{e}_u$  (p. ex.) est la normale unitaire à la surface paramétrée par  $v$  et  $w$ , c-à-d :

$$\begin{aligned} \vec{e}_u &= \frac{\vec{r}_v \times \vec{r}_w}{\|\vec{r}_v \times \vec{r}_w\|} = \frac{\vec{r}_u}{\|\vec{r}_u\|} \\ \Rightarrow q_{(u)} &= (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) \cdot \frac{(x_u, y_u, z_u)}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} = \frac{1}{H_u} (\Phi_x x_u + \Phi_y y_u + \Phi_z z_u) \end{aligned}$$

D'autre part :  $\Phi(x, y, z) = \widetilde{\Phi}(x, y, z)$ , d'où

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u} = \Phi_x \frac{\partial x}{\partial u} + \Phi_y \frac{\partial y}{\partial u} + \Phi_z \frac{\partial z}{\partial u}$$

et

$$q(u) = \left( \overrightarrow{\text{grad}} \widetilde{\Phi} \right)_{(u)} = \frac{1}{H_u} \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial u}$$

On peut calculer de la même façon  $q(v)$  et  $q(w)$ . Ainsi

**Formule 12.1 (Gradient).**

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \left( \frac{1}{H_u} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{H_v} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{1}{H_w} \frac{\partial}{\partial w} \right)$$

### Exemple 12.2 Coordonnées cylindriques

Soit  $(u, v, w) = (\delta, \varphi, z)$  et

$$\begin{cases} x = \delta \cos \varphi \\ y = \delta \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} H_\delta^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial \delta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \delta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \delta} \right)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 0 = 1 \\ H_\varphi^2 &= \delta^2 (-\sin \varphi)^2 + \delta^2 (\cos \varphi)^2 + 0 = \delta^2 \\ H_z^2 &= 0 + 0 + 1^2 = 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{(\delta, \varphi, z)} = \left( \frac{\partial}{\partial \delta}, \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

### 12.2.2 Divergence

On a vu dans la section 9.2 (page 48) que

**Formule 12.2.**

$$\operatorname{div} \vec{q}|_{P_0} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V_G} \oiint_{\partial G} \vec{q} \cdot \vec{n} dS \quad P_0 \in G$$

Sur  $S$

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = \vec{q} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \vec{q} \cdot \frac{\vec{r}_w}{\|\vec{r}_w\|} = \vec{q} \cdot \vec{e}_w = q_{(w)}$$

et

$$dS = H_u H_v du dv$$

Considérons alors le flux traversant  $S$  et  $S^+$

$$\begin{aligned} F &= \iint_{S^+} q_{(w)} dS - \iint_S q_{(w)} dS \\ &= \int_{u_0}^{u_0 + \Delta u} \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v} \left[ q_{(w)} H_u H_v \Big|_{(u, v, w_0 + \Delta w)} - q_{(w)} H_u H_v \Big|_{(u, v, w_0)} \right] du dv \\ &= \int_{u_0}^{u_0 + \Delta u} \int_{v_0}^{v_0 + \Delta v} \frac{\partial}{\partial w} (H_u H_v q_{(w)}) \Big|_{(u, v, w'_0)} \Delta u \Delta v \Delta w \end{aligned}$$

Et il en est de même pour les autres faces.

Par ailleurs

$$V_G \sim H_u H_v H_w \Delta u \Delta v \Delta w$$

Alors quand  $\Delta u \Delta v \Delta w \rightarrow 0$ ,  $P'_0 \rightarrow P_0$  et la formule 12.2 devient

**Formule 12.3 (Divergence).**

$$\operatorname{div} \vec{q} = \frac{1}{H_u H_v H_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (H_v H_w q_{(u)}) + \frac{\partial}{\partial v} (H_u H_w q_{(v)}) + \frac{\partial}{\partial w} (H_u H_v q_{(w)}) \right]$$

### 12.2.3 Opérateur $\Delta$ (de Laplace)

**Formule 12.4 (Laplacien).**

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \operatorname{div} \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi \right) \\ &= \frac{1}{H_u H_v H_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{H_v H_w}{H_u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{H_u H_w}{H_v} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{H_u H_v}{H_w} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) \right] \end{aligned}$$

### 12.2.4 Rotationnel

Un raisonnement analogue à celui fait pour la divergence (section 12.2.2) appliqué à la relation

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} q \cdot \vec{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \oint_{\partial S} \vec{q} \cdot d\vec{r}$$

conduit au résultat

**Formule 12.5 (Rotationnel).**

$$\begin{aligned} (\vec{\text{rot}} q)_{(u)} &= \frac{1}{H_v H_w} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (H_w q_w) - \frac{\partial}{\partial w} (H_v q_v) \right] \\ (\vec{\text{rot}} q)_{(v)} &= \frac{1}{H_u H_w} \left[ \frac{\partial}{\partial w} (H_u q_u) - \frac{\partial}{\partial u} (H_w q_w) \right] \\ (\vec{\text{rot}} q)_{(w)} &= \frac{1}{H_u H_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (H_v q_v) - \frac{\partial}{\partial v} (H_u q_u) \right] \end{aligned}$$





# Chapitre 13

## Potentiels newtoniens

Notre problème c'est trouver quelles sont les fonctions harmoniques  $u(x, y, z) = u(P)$  ne dépendent pas de la distance  $OP$ . On cherche  $\Delta u = 0$  où  $u = u(\|\vec{OP}\|) = u(r)$ . D'où

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} u(r) = 0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) + \underbrace{0+0}_{\text{car } u \text{ ne dépend pas de } \theta \text{ et } \varphi}$$

On résout l'équation différentielle radiale et on obtient

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{du}{dr} = k \Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{k}{r^2} \Rightarrow u = -\frac{k}{r} + L$$

On peut donc conclure que les seules fonctions sont

$$\begin{cases} u = \frac{1}{r} & \text{harmonique partout sauf à l'origine} \\ u = 1 & \text{harmonique partout} \end{cases}$$

ainsi que toute leurs combinaison linéaire.

Physiquement, on a affaire à 2 situations analogues :

- charges électriques, champ électrique, potentiel électrostatique ;
- masses, champ gravitationnel, potentiel newtonien.

1. Potentiel newtonien d'une masse  $m = 1$  située à l'origine pour un point  $P(x, y, z)$  :

$$U(P) = \gamma \frac{m \cdot 1}{r}$$

où  $\gamma$  est la constante de gravitation universelle.

On a  $\Delta U = 0, \forall P \neq 0$ .

Posons

$$\frac{1}{\gamma} U = u \Rightarrow u(P) = \frac{m}{r}$$

On veut maintenant savoir quel est le flux de  $\vec{\text{grad}} u$  sortant d'une sphère  $S$  centrée en  $O$  de rayon  $R$ .

$$\Delta u = \text{div} \left( \vec{\text{grad}} u \right) = 0 \quad \forall P \neq 0$$

mais ici  $O \in$  Boule de rayon  $R$  ; il y a une source qui apparaît. On ne peut pas utiliser le théorème de Gauss. Ainsi

**Formule 13.1.**

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{S=\partial S} \overrightarrow{\text{grad}} u \cdot \vec{n} dS &= \oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \\
&= \oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=R} dS = \\
&= \oint\limits_S \left(-\frac{m}{R^2}\right) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
&= -m \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\
&= -4\pi m
\end{aligned}$$

**Conséquence.** Soit  $G$  un domaine quelconque :

- (a) Si  $O \notin G$ , le flux de  $\overrightarrow{\text{grad}} u$  est nul ;
  - (b) Si  $O \in G$ , le flux de  $\overrightarrow{\text{grad}} u = -4\pi m$ .
2. Potentiel newtonien en  $P$  d'un ensemble de  $n$  masses  $m_k$  en  $Q_k(x_k, y_k, z_k)$  :

**Formule 13.2.**

$$U(P) = \frac{m_1}{\|\overrightarrow{PQ_1}\|} + \frac{m_2}{\|\overrightarrow{PQ_2}\|} + \dots + \frac{m_n}{\|\overrightarrow{PQ_n}\|} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{\|\overrightarrow{PQ_k}\|}$$

Cette fonction est harmonique partout sauf en  $Q_k$ , en effet  $\forall P \neq Q_k$

$$\begin{aligned}
\Delta \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{PQ_k}\|} \right) &= \Delta_{x,y,z} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2}} \right) \\
&= \Delta_{x',y',z'} \left( \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) = 0
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si tous les  $Q_k \in G \subset R^3$ , alors, en utilisant la formule 1, on obtient

**Formule 13.3.**

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} dS = -4\pi \sum_{k=1}^n m_k$$

3. Potentiel newtonien en  $P$  engendré par un corps de masse spécifique  $\mu(Q) \in C^1$   
 Considérons  $\mu(Q) dV_Q$  comme la masse de l'élément différentiel  $\frac{dV}{Q}$ ,  $Q \in D$ , par analogie à la formule 13.2 on obtiendra

**Formule 13.4.**

$$U(P) = \iiint\limits_{Q \in D} \frac{\mu(Q)}{\|\overrightarrow{PQ}\|} dV_Q$$

et pour  $D \subset G$  on a, par la formule 13.3 :

**Formule 13.5.**

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} dS = -4\pi \iiint_{Q \in D} \mu(Q) dV_Q$$

- (a) Si  $P \notin D$ ,  $\|\overrightarrow{PQ}\| \neq 0$ , l'intégrale de la formule 13.4 est régulière et  $U(P)$  est harmonique à l'extérieur de  $D$ .
- (b) Si  $P \in D$ ,  $\|\overrightarrow{PQ}\| = 0$  lorsque  $Q = P$  l'intégrale de la formule 13.4 est impropre et  $\Delta u(x, y, z) = -4\pi\mu(x, y, z)$  ; c'est l'équation de Poisson lorsque  $P(x, y, z)$  est intérieur à  $D$ .



# Chapitre 14

## Applications à des modèles physiques

### 14.1 Loi d'Archimède

Soient  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\rho$  la masse spécifique du fluide. La pression dans le fluide en  $z = p(z)$  s'exprime par  $p(z) = c - \rho g z$ , d'où

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = (0, 0, -g\rho) = -\rho g \vec{k}$$

On veut évaluer la résultante générale des pressions exercées sur le corps  $G$ . La force appliquée sur l'élément de surface  $dS$  vaut  $-p(z)\vec{n}dS$ , et la force résultante

**Formule 14.1 (Loi d'Archimède).**

$$\vec{F} = \oint\limits_{\partial G} (-p(z)\vec{n}dS) = - \iiint_G \overrightarrow{\text{grad}} p dV = + \iiint_G \rho g \vec{k} dV = \rho g V \vec{k}$$

La *poussée hydrostatique* est dirigée vers le haut et est égale au poids du fluide déplacé.

### 14.2 Équation de Poisson de l'électrostatique

Considérons un milieu inhomogène, de charge électrique spécifique  $\rho$ . Par les lois de la physique le flux total du champ électrique  $\vec{E}$  sortant d'une surface fermée  $\partial G$  vaut  $4\pi Q$ , où  $Q$  est la charge totale dans  $G$ . Donc

$$4\pi \iiint_G \rho(x, y, z) dV = \oint\limits_{\partial G} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_G \text{div } \vec{E} dV$$

d'où

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

Dans le cas électrostatique (c-à-d que le champ magnétique  $\vec{H}$  est indépendant du temps  $t$ )  $\vec{E}$  satisfait  $\overrightarrow{\text{rot}} E = \vec{0}$  (équation de Maxwell) et donc  $\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} u$ , d'où

**Formule 14.2 (Équation de Poisson).**

$$\Delta u = -4\pi\rho$$

### 14.3 Équation de la continuité en hydrodynamique

On considère un mouvement non stationnaire d'un fluide ou d'un gaz. Soient  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(P, t)$  le champ de vitesses et  $\rho = \rho(x, y, z, t) = \rho(P, t)$  la masse spécifique. Soit  $G$  un domaine de  $R^3$  fixe dans le fluide. La masse totale du fluide occupant  $G$  à l'instant  $t$  est

$$M(t) = \iiint_{P \in G} \rho(P, t) dV$$

La variation de masse entrant dans  $G$  par seconde est

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_{P \in G} \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} dV$$

Or à travers l'élément de surface  $S$  il entre, par unité de temps, la quantité  $-\rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$ , au total

$$- \oiint_{S=\partial G} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Il s'ensuit (par la loi de la conservation de la masse) que

$$\iiint_G \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oiint_{S=\partial G} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = - \iiint_{\varphi} \operatorname{div}(\rho \vec{V}) dV$$

d'où

**Formule 14.3 (Équation de la continuité).**

$$\frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}(P, t)) = 0$$

### 14.4 Équation de conduction ou de diffusion thermique

Soit un milieu inhomogène  $M$ . On connaît les grandeurs

$$\begin{cases} m(x, y, z) & \text{masse spécifique} \\ C(x, y, z) & \text{chaleur spécifique} \\ k(x, y, z) & \text{coefficient de conductibilité thermique} \end{cases}$$

On cherche la température au point  $P(x, y, z)$  à l'instant  $t$ . Considérons un domaine fixe  $G \subset M$ ; on peut calculer la quantité totale de chaleur dans  $G$  à l'instant  $t$ :

$$Q(t) = \iiint_{P \in G} C(P)m(P)u(P, t) dV \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \iiint_G C(P)m(P) \frac{\partial u(P, t)}{\partial t} dV$$

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de source de chaleur dans  $G$ , alors, par la loi de la conservation de la chaleur, la même quantité de chaleur par unité de temps doit entrer dans  $G$  par la surface  $\partial G$ ; elle vaut

$$\oiint_{S=\partial G} k(P) \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

d'où

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_G Cm \frac{\partial u}{\partial t} dV = \oint_{\partial G} k \overrightarrow{\text{grad}} u \vec{n} dS = \iiint_G \text{div} \left( k \overrightarrow{\text{grad}} u \right) dV$$

Donc  $\forall G$

$$\iiint_G \left[ Cm \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div} \left( k \overrightarrow{\text{grad}} u \right) \right] dV = 0$$

c-à-d

**Formule 14.4 (Équation de la chaleur).**

$$C(P)m(P) \frac{\partial u(P,t)}{\partial t} = \text{div} \left[ k(P) \overrightarrow{\text{grad}} u(P,t) \right]$$

En particulier, si la surface est homogène,  $C$ ,  $m$  et  $k$  sont des constantes

$$Cm \frac{\partial u}{\partial t} = k \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta U$$

## 14.5 Loi de Helmholtz sur le tourbillons

Soit  $\vec{v}$  un champ de vitesses et posons  $\vec{q} = \overrightarrow{\text{rot}} v$ .

**Définition 14.1.** On appelle *tube de tourbillon* le volume engendré par toutes les trajectoires de  $\vec{q}$  traversant une surface  $S_1$  de frontière  $\Gamma_1$  fermée.

Le flux des vecteurs tourbillons à travers  $S_1$  est

$$\iint_{S_1} \vec{q} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot}} v \cdot \vec{n}_1 dS = \oint_{\Gamma_1 = \partial S_1} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

Soit  $G$  la partie du tube de tourbillon situé entre  $S_1$  donnée et  $S_2$  de contour  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} \vec{q} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{S_1} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \int \int_{\text{Surface latérale } L} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \\ &= - \iint_{S_1} \vec{q} \cdot \vec{n}_1 dS + 0 + \iint_{S_2} \vec{q} \cdot \vec{n}_2 dS = \\ &= \oint_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \oint_{\Gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iiint_G \text{div} \vec{q} dV = \\ &= \iiint_G \text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} v) dV = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

et donc

$$\iint_{S_1} \vec{\text{rot}} v \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_{S_2} \vec{\text{rot}} v \cdot \vec{n}_2 \, dS$$

Ainsi dans un tube de tourbillons le flux est indépendant de la section choisie. Un tube de tourbillon soit se referme sur lui même soit aboutit à la frontière du domaine du fluide.



**Troisième partie**

**Équations aux valeurs propres**  
**(introduction)**



# Chapitre 15

## Le problème du flambage

Par les lois de la statique (déformation des corps solides et la théorie des moments) l'équation différentielle de la ligne élastique est

$$y'' = -\frac{M(x)}{EJ}$$

où  $M$  est le moment de flexion d'une section  $Py$ ,  $E$  est le module d'élasticité et  $J$  est le moment d'inertie de la section considérée.

On a

$$y'' = -\frac{P}{EJ}y = -\alpha^2 y$$

où  $\alpha$  est un paramètre variable.

C'est une équation différentielle de second ordre linéaire  $y'' + \alpha^2 y = 0$ , dont la solution est  $y = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)$ , sous les conditions initiales

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ y(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin(\alpha l) = 0 \end{cases}$$

Si  $\sin(\alpha l) \neq 0$ ,  $C_2 = 0$  et  $y = 0$ .

Si  $\sin(\alpha l) = 0$ ,  $\alpha l = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , alors  $y_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ . La valeur critique est donnée par le plus petit  $n$  (c-à-d  $n = 1$ ).

$$\alpha_{\text{critique}} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow P_{\text{critique}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

En analyse on écrit

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad \text{dans } ]a, b[ \text{ + conditions aux extrémités}$$

Si  $\exists y(x) \neq 0$  satisfaisant l'équation, la valeur  $\lambda$  correspondante est appelée *valeur propre*  $\lambda_n$  de la fonction propre  $y_n(x)$ .



# Chapitre 16

## Problème de Sturm-Liouville - Corde vibrante

On veut déterminer la position  $U(x, t) = u(x)$  à un instant  $t$  donné d'une corde élastique inhomogène vibrant sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Soient  $\sigma = \sigma(x) > 0$  le coefficient d'élasticité et  $\rho = \rho(x) > 0$  la masse spécifique. Si la corde est fixée (mais pas forcément) aux extrémités  $u(a) = u(b) = 0$  l'équation qui détermine  $u(x)$  est alors

**Formule 16.1 (Équation de Sturm-Liouville).**

$$[\sigma(x)u'(x)]' + \lambda\rho(x)u(x) = 0$$

*C'est une équation de Sturm-Liouville dont les conditions générales sont*

$$\begin{cases} u(a) - pu'(a) = 0 \\ u(b) - qu'(b) = 0 \end{cases} \quad p, q > 0$$

### 16.1 Cas particuliers

1. (a) Si  $\sigma$  et  $\rho$  sont des constantes, on obtient  $u'' + \lambda u = 0$ . C'est l'équation de la corde vibrante homogène.  
(b) Si  $\sigma = 1$  on a  $u'' + \lambda\rho(x)u = 0$ . C'est l'équation de la corde vibrante inhomogène.
2. (a)  $p = 0$  (ou  $q = 0$ ) la corde est fixée en  $x = a$  (ou  $x = b$ ) et  $u(a) = 0$ .  
(b)  $p \rightarrow \infty$  la condition en  $x = a$  devient  $u'(a) = 0$ . On dit que la corde est libre en  $x = a$ .

Si l'équation de la formule 16.1 possède une solution  $u(x)$  alors  $Cu(x)$  est aussi solution.

Si la solution est  $\neq 0$  pour un certain  $\lambda_k$ , c'est une valeur propre d'ordre  $k$  correspondant à la fonction propre  $u_k(x)$ .

#### Exemple 16.1

Soit la corde homogène, fixée en  $x = 0$  et libre en  $x = L$  ;  $u'' + \lambda u = 0$ ,  $u(0) = 0$  et  $u'(L) = 0$ .

1. Si  $\lambda = 0$  on a  $u'' = 0$  et donc  $u = \alpha x + \beta$  et  $u(0) = 0 = \beta$ ,  $u'(L) = 0 = \alpha$ .  
On a  $U \equiv 0$  ; la solution est donc à rejeter.

2. Si  $\lambda = \nu < 0$  on a  $u'' - \nu u = 0$ , d'où l'équation caractéristique  $r^2 - \nu^2 = 0$ , donc  $r = \pm \nu$ .  
On a  $u = \alpha e^{\nu x} + \beta e^{-\nu x} = a \cosh(\nu x) + b \sinh(\nu x)$  et

$$\begin{cases} u(0) = 0 = a \\ u'(L) = 0 = b\nu \cosh(\nu L) \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

On a  $U \equiv 0$  ; la solution est donc à rejeter.

3. Si  $\lambda = \mu^2 > 0$  on a  $u'' - \mu u = 0$ , d'où l'équation caractéristique  $r^2 + \mu^2 = 0$ , donc  $r = \pm i\mu$ .  
On a  $u = \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x)$  et

$$\begin{cases} u(0) = 0 = \alpha \\ u'(L) = 0 = \beta\mu \cos(\mu L) \Rightarrow \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \mu L = 0 \end{cases}$$

d'où  $\lambda_k = (2k-1)^2 \frac{\pi^2}{4}$  et  $u_k(x) = \beta_k \sin\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}x\right]$  avec  $k = 1, 2, \dots$

### Exemple 16.2

On considère l'équation de Sturm-Liouville

$$\left[ e^{2px} u' \right]' \lambda^2 e^{2px} u = 0$$

avec  $p > 0$  et  $u(0) = u(1) = 0$ . Déterminer  $p$  pour que  $\lambda^2 = 2\pi^2$  soit une valeur propre.

On a l'équation caractéristique

$$(2pu' + u'')e^{2px} + \lambda^2 e^{2px} u = 0$$

d'où

$$u'' + 2pu' + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{équation linéaire à coefficients constants})$$

On a le polynôme caractéristique

$$r^2 + 2pr + \lambda^2 = 0$$

et les solutions

$$r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \lambda^2} = -p \pm \sqrt{p^2 - 2\pi^2}$$

Pour obtenir une solution oscillante, il faut avoir  $p^2 - 2\pi^2 < 0$ , c-à-d  $p < \sqrt{2}\pi$  et

$$r_{1,2} = -p \pm \sqrt{2\pi^2 - p^2}i$$

d'où

$$u(x) = e^{-px} \left( C_2 \sin\left(\sqrt{2\pi^2 - p^2}x\right) + C_1 \cos\left(\sqrt{2\pi^2 - p^2}x\right) \right)$$

Conditions :  $u(0) = 0 = C_1$  et  $u(1) = 0 = e^{-p} C_2 \sin\left(\sqrt{2\pi^2 - p^2}\right)$ . D'où

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi^2 - p^2} = k\pi \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow 2\pi^2 - p^2 = k^2\pi^2$$

$$\Rightarrow p^2 = (2 - k^2)\pi^2 \quad \text{possible seulement si } k = 1$$

$$\Rightarrow p = \pi \quad \text{qui satisfait } p < \sqrt{2}\pi$$

## 16.2 Quelques propriétés des valeurs propres et des fonctions propres

- L'ensemble des  $\lambda_k$  forme le spectre discret de l'opérateur différentiel et  $\{\lambda_k\}$  est une suite croissante ( $k \in \mathbb{N}^*$ ). Le système de la formule 16.1 ne possède que des valeurs propres positives ou nulles.
- Soit  $\rho > 0$  dans  $J = [a, b]$ ,  $u'' + \lambda \rho u = 0$  dans  $J$ ,  $u(a) = u(b) = 0$ , alors
  - $u_1$  ne change pas de signe ;
  - $u_n$  change  $(n - 1)$  fois de signe et les zéros de  $u_{n+1}$  sont séparés par ceux de  $u_n$ .
- **Orthogonalité des fonctions propres**

Considérons l'équation suivante

$$u'' + \lambda \rho u = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) + qu'(L) = 0 \end{cases}$$

Soient  $u_m$  et  $u_n$  deux fonctions propres correspondant à  $\lambda_m \neq \lambda_n$ . On a

**Formule 16.2 (Orthogonalité).**

$$\int_0^L \rho(x) u_m(x) u_n(x) dx = 0$$

La propriété d'orthogonalité reste vraie pour le système général de la formule 16.1.





# **Quatrième partie**

## **Séries de Fourier**



# Chapitre 17

## Préliminaires

### 17.1 Position du problème

Considérons la fonction répartition de la chaleur  $u(x, t)$  sur l'intervalle  $0 \leq x \leq 1, t > 0$ . Elle doit satisfaire une équation aux dérivées partielles du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et

$$\begin{cases} u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{conditions aux limites} \\ u(x, 0) = h(x) & \text{conditions initiales} \end{cases}$$

L'idée est de chercher une solution particulière exprimée par séparation des variables

$$u(x, t) = f(x)g(t)$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\Rightarrow f(x)\dot{g}(t) = f''(x)g(t) \\ &\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = cte = -\lambda^2 \\ &\Rightarrow f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{g}(t) + \lambda^2 g(t) = 0 \end{aligned}$$

De plus les conditions aux limites impliquent

$$f(0)g(t) = f(1)g(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = f(1) = 0 \quad (\text{équation de la corde vibrante})$$

On a comme solution

$$f_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$\frac{\dot{g}_n(t)}{g_n(t)} = -n^2\pi^2 \quad \Rightarrow \quad g_n(t) = \gamma_n e^{-n^2\pi^2 t}$$

et ainsi

$$u_n(x, t) = f_n(x)g_n(t) = b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

Chacun des  $u_n$  vérifie l'équation donnée et les conditions homogènes aux extrémités ; il reste encore à satisfaire les conditions initiales

$$u_n(x, t) = h(x) \stackrel{?}{=} b_n \sin(n\pi x)$$

Fourier a eu l'idée, compte tenu de la linéarité, de superposer toutes les solutions  $u_n$ , c-à-d poser

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$

d'où

$$u(x, 0) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

C'est une série de fonctions trigonométriques ou série de Fourier.

Est-ce possible ? Si oui, que valent les  $b_n$  ? S'il existent, de quel type est la convergence de la solution ?

## 17.2 Rappel concernant les séries

### 17.2.1 Séries numériques à termes positifs

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad a_k > 0$$

Si la suite

$$\left\{ S_n = \sum_{k=1}^n a_k \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

cette limite est la somme de la série.

Condition nécessaire (mais pas suffisante) de convergence :

$$a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

#### Exemple 17.1

La série

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

converge, et  $S = 1$ .

#### Exemple 17.2 Série géométrique

La série

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \quad |\alpha| < 1$$

converge, et  $S = \frac{1}{1-\alpha}$ .

**Critères de convergence**– **Comparaison**

$$\min_k \leq a_k \leq \max_k \quad \begin{cases} \text{minorant } \min_k \text{ diverge} \\ \text{majorant } \max_k \text{ converge} \end{cases}$$

On peut p. ex. comparer la série donnée a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}} \quad \begin{cases} \text{converge si } \beta > 1 \\ \text{diverge si } 0 < \beta \leq 1 \end{cases}$$

– **Quotient, racine**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q \end{array} \right\} \text{ si } \begin{cases} q < 1 & \text{la série converge} \\ q > 1 & \text{la série diverge} \\ q = 1 & \text{cas douteux} \end{cases}$$

– **Intégral**

Soit  $a_k = f(k)$ , avec  $f(x)$  décroissante.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx \quad \text{convergent ou divergent simultanément}$$

**Séries alternées**

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \quad a_k > 0$$

Si  $a_k > a_{k+1}$  et  $a_k \rightarrow 0$  la série converge.

**Série quelconque**

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

## – Si

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ converge}$$

la série est absolument convergente et sa somme ne dépend pas de l'ordre de ses termes.

## – Si

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ converge}$$

la série est dite semi-convergente.

### 17.2.2 Séries entières

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

Cette série converge sur  $] -R, R[$  où  $R$  est la rayon de convergence,

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

ont même rayon de convergence et la leur somme vaut respectivement

$$S'(x) \quad \text{et} \quad \int_0^x S(t) dt$$

### 17.2.3 Séries de fonctions

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

La série converge uniformément dans  $J = [a, b]$  si le reste de la série  $S(x)$  vérifie  $|S(x)| < \epsilon$  ( $k_n > N_\epsilon$ ) indépendamment de  $x \in I$ .

#### Critère de Weierstrass

Si  $|u_k(x)| \leq M_k$  dans  $I$  et

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

est une série convergente, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

converge uniformément dans  $I$ .

#### Propriétés

1. Si  $u_k(x) \in C^\circ(I)$  et que  $S(x)$  converge uniformément dans  $I$ , alors  $S(x) \in C^\circ(I)$
2. Si  $u_k(x) \in C^\circ(I)$  et que  $S(x)$  converge uniformément dans  $I$ , alors  $\forall [\alpha, x] \subset [a, b]$ ,

$$\int_{\alpha}^x s(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^x u_k(t) dt$$

est une série uniformément convergente (on peut permuter les signes  $\int$  et  $\sum$ ).

3. Si  $u_k(x) \in C^0(I)$  et que  $S(x)$  converge uniformément n'implique pas que

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

converge uniformément.

### Example 17.3

Soit

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^3}$$

Par le critère

$$|u_k(x)| \leq \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

converge, donc  $S(x)$  est uniformément convergente  $\forall x$ .

Mais

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin(k^2 x)}{k^3} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^2 x)}{k^3}$$

ne converge pas  $\forall x$  puisque p. ex. pour  $x = 0$

$$\sigma(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rightarrow \infty$$

On peut affirmer cependant que si  $u_k(x) \in C'(x)$  et

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$$

converge et

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

converge uniformément alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

converge uniformément et

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x) = \frac{d}{dx} S(x) \quad \left( \text{c-à-d} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \right)$$

## 17.3 Les séries trigonométriques

Choisissons

$$u_k(x) = c_k \sin(kx + \varphi_k) \quad k \in \mathbb{N}$$

es donnons-nous une fonction  $f(x)$  continue dans  $I = [-\pi, \pi]$ . Admettons que l'on puisse représenter cette fonction à l'aide de la série des  $u_k$ . On a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(kx + \varphi_k) \quad x \in I$$

Alors

$$f(x \pm 2\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(kx + \varphi_k \pm 2k\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(kx + \varphi_k) = f(x)$$

c-à-d que  $f(x)$  devient une fonction de période  $2\pi$ .

Ainsi si la série représente  $f(x)$  sur  $I = [-\pi, \pi]$  elle représente  $f(x)$  prolongée par période  $2\pi$ .

Inversement, on ne peut pas représenter une fonction non périodique par une telle série.

On écrit par convention

**Formule 17.1 (Développement de Fourier).**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cos \varphi_k \sin(kx) + c_k \sin \varphi_k \cos(kx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

*C'est le développement de Fourier de  $f(x)$ .*



# Chapitre 18

## Coefficients de Fourier et validité des résultats

### 18.1 Deux propriétés des fonctions périodiques

1. Si  $f$  est une fonction périodique de période  $T$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx$$

est une valeur indépendante de  $\alpha$ . En effet

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx &= \int_{\alpha}^T f(x) dx + \int_T^{\alpha+T} f(x) dx = \\ &= \int_{\alpha}^T f(x) dx + \int_{\rho=0}^{\alpha} f(\rho+T) d\rho = \\ &= \int_{\alpha}^T f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(\rho) d\rho = \\ &= \int_0^T f(x) dx \end{aligned}$$

Pour ce qui suit, on choisira  $\alpha = -\pi$  et  $T = 2\pi$ .

2. Les fonctions  $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}$ , ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) forment un ensemble de fonctions orthogonales sur  $[-\pi, \pi]$ . En effet

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) dx = 0$$

De même  $\forall k \neq l$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(lx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(lx) dx = 0$$

## 18.2 Coefficients de Fourier

Admettons que la fonction  $f(x)$  définie dans  $[-\pi, \pi]$  (et prolongée par périodicité) soit représentable par une série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

où les coefficients, appelés les coefficients de Fourier, valent

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad k = 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## 18.3 Conditions et théorème de Dirichlet

**Définition 18.1 (Conditions de Dirichlet).** Une fonction  $f(x)$  satisfait aux conditions de Dirichlet sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  si

- elle est continue sur cet intervalle ou possède un nombre fini de discontinuités de première espèce (c-à-d que la limite à gauche et à droite existent et sont différentes) ;
- l'intervalle  $I$  peut être décomposé en un nombre fini de sous-intervalles, tels que sur chacun d'eux la fonction est monotone.

**Théorème 18.1 (de Dirichlet).** Si  $f(x)$  définie sur  $[-\pi, \pi]$  satisfait aux conditions de Dirichlet, la série de Fourier de cette fonction converge sur tout  $I$  et la somme de cette série vaut

- $f(x)$  en tout point de continuité de  $f$  situé dans  $I$  ;
- $\frac{1}{2} [f(-c) + f(c)]$  en tout point de discontinuité  $x = c$  ;
- $\frac{1}{2} [f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$  aux extrémités de l'intervalle ( $x = -\pi$  ou  $x = \pi$ ).

## 18.4 Erreur quadratique moyenne

Soit  $f(x)$  défini sur  $[-\pi, \pi]$ , périodique et satisfaisant aux conditions de Dirichlet. Considérons

$$\varphi_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$$

où  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont arbitraires et notons  $\delta_n(x) = f(x) - \varphi_n(x)$ . On cherche à déterminer les  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  de telle sorte que l'erreur quadratique moyenne

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_n^2(x) dx$$

soit minimale.

**Théorème 18.2.**  $\Delta_n^2$  ( $n$  fixe) est minimum si  $\alpha_k = a_k$  et  $\beta_k = b_k$ , c-à-d que les coefficients du «meilleur» polynôme trigonométrique d'approximation sont les coefficients de Fourier.

### 18.4.1 Conséquences

Posons

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

alors

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} F_p^2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} F_i^2(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_p^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_i^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_p + f_i)^2 dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_p f_i dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit

**Formule 18.1.**

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la somme  $S_n$  devient alors la série de Fourier de  $f(x)$ , d'où  $\delta_n = 0$  et donc  $\Delta_n^2 = 0$  et on obtient l'égalité de Bessel-Parseval :

**Formule 18.2 (Égalité de Bessel-Parseval).**

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$



# Chapitre 19

## Cas particulier et exemples

### 19.1 Fonctions paires et impaires

1. Si  $f(x)$  est une fonction paire ( $f(-x) = f(x) \forall x \in [0, \pi]$ ) alors

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0\end{aligned}$$

La série de Fourier correspondante ne contient que des termes en cos (et de terme constante).

2. Si  $f(x)$  est une fonction impaire ( $f(-x) = -f(x) \forall x \in [0, \pi]$ ) alors

$$\begin{aligned}a_n &= 0 \\b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx\end{aligned}$$

La série de Fourier correspondante ne contient que des termes en sin.

### 19.2 Exemples de développements

Toutes les fonctions données ici sont définies sur  $[-\pi, \pi]$  et prolongées par périodicité.

#### Exemple 19.1

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & -\pi < x < 0 \\ \beta & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \alpha dx + \int_0^{\pi} \beta dx \right) = \alpha + \beta \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \alpha \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \beta \cos(nx) dx \right) = \frac{1}{\pi} (\alpha 0 + \beta 0) = 0 \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \alpha \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} \beta \sin(nx) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\alpha}{n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\beta}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} (\alpha - \beta) \frac{1}{n} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{2}{\pi} (\alpha - \beta) \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2} (\alpha - \beta) - \frac{2}{\pi} (\alpha - \beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x = \begin{cases} \alpha & -\pi < x < 0 \\ \beta & 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2} & x = -\pi, 0, \pi \end{cases}$$

### Exemple 19.2

Soit  $f(x) = x$ . Or  $f(x)$  est paire, donc  $a_n = 0$ . On calcule  $b_n$  :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\pi}{n} (-1)^n - 0 + 0 \right] = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}
 \end{aligned}$$

d'où

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) = \begin{cases} x & x \in ]-\pi, \pi[ \\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

### Exemple 19.3

Soit  $f(x) = |x|$ .  $f(x)$  est paire, donc  $b_n = 0$ . Le terme constante vaut

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

et  $a_n$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{x}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \\
 \Rightarrow 0 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\
 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

**Exemple 19.4**

Soit  $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ . Cette fonction est impaire (donc  $a_k = 0$ ). On a

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x^3 - \pi^2 x) \sin(kx) dx = \dots = \frac{12(-1)^k}{k^3}$$

d'où

$$x^3 - \pi^2 x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin(kx)$$

Par le théorème de Parseval il s'ensuit

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x^3 - \pi^2 x)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{144}{k^6}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

**Exemple 19.5**

Soit  $f(x) = \cos(tx)$ .  $f(x)$  est paire. On a

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(tx) dx = \frac{2}{\pi t} \sin(tx) \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi t} \sin(\pi t)$$

et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(tx) \cos(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos((t-k)x) \cos(nx) + \cos((t+k)x)] dx = \\ &= \dots = \frac{1}{\pi} \frac{2t}{t^2 - k^2} \sin(\pi t) (-1)^k \end{aligned}$$

d'où

$$\cos(tx) = \frac{1}{\pi t} \sin(\pi t) + \frac{2t}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{t^2 - k^2} \cos(kx) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

**Application :** en posant  $x = 0$  on obtient

$$\frac{\pi}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{t-k} + \frac{1}{t+k} \right) (-1)^k$$

On pose  $\pi t = X$  et on le développement en fractions simples de  $(\sin X)^{-1}$  :

$$\frac{1}{\sin X} = \frac{1}{X} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{X - k\pi} + \frac{1}{X + k\pi} \right)$$





# Chapitre 20

## Fonctions périodiques de période $T$ et développement complexe

Soit  $\varphi(x)$  définie sur  $[a, b]$  satisfaisant aux conditions de Dirichlet. On prolonge  $\varphi$  par périodicité (la période est donc  $T = b - a$ ). On note  $\widehat{\varphi}(x)$  la fonction prolongée. Considérons l'intervalle  $x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  et posons  $\rho = \frac{2\pi}{T}x$ , on a  $\widehat{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}\left(\frac{T}{2\pi}\rho\right)$  avec  $\rho \in [-\pi, \pi]$ .

On peut maintenant développer en séries de Fourier la fonction  $\widehat{\varphi}\left(\frac{T}{2\pi}\rho\right)$ . On a

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T} \int_a^b \varphi(x) dx \\a_n &= \frac{2}{T} \int_a^b \varphi(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx \\b_n &= \frac{2}{T} \int_a^b \varphi(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx\end{aligned}$$

d'où

**Formule 20.1 (Développement complexe).**

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) \right)$$

### 20.1 Écriture complexe

Posons pour simplifier  $\frac{2\pi}{T} = \alpha$ . On a, par les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha kx) &= \frac{1}{2} (e^{i\alpha kx} + e^{-i\alpha kx}) \\ \sin(\alpha kx) &= \frac{1}{2} (e^{i\alpha kx} - e^{-i\alpha kx})\end{aligned}$$

En utilisant ces formules on a

$$a_k \cos(\alpha kx) + b_k \sin(\alpha kx) = \underbrace{\frac{1}{2}(a_k - ib_k)}_{A_k} e^{i\alpha kx} + \underbrace{\frac{1}{2}(b_k + ia_k)}_{B_k} e^{-i\alpha kx}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(x) [\cos(\alpha k x) - i \sin(\alpha k x)] dx = \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(x) e^{-i\alpha k x} dx \\ B_k &= \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(x) [\cos(\alpha k x) - i \sin(\alpha k x)] dx = \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(x) e^{i\alpha k x} dx = A_{-k} \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\alpha k x} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} e^{-i\alpha k x} = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\alpha k x} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} e^{-i\alpha k x}$$

donc

**Formule 20.2.**

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i \frac{2k\pi}{T} x} \quad \text{avec} \quad A_k = \frac{1}{T} \int_a^b \varphi(x) e^{-i \frac{2k\pi}{T} x} dx$$

En particulier si  $a = -\pi$  et  $b = \pi$  on a

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ikx} \quad \text{avec} \quad A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

## 20.2 Convergence uniforme et vitesse de convergence

**Théorème 20.1.** Soit  $f(x)$  périodique ( $2\pi$ ) vérifiant les conditions de Dirichlet.

1. La série de Fourier de  $f(x)$  converge uniformément vers  $f(x)$  sur chaque intervalle  $I \subset [-\pi, \pi]$  où  $f \in C^0(I)$ .
2. La série de Fourier de  $f(x)$  (continue) converge uniformément  $\forall x$  si  $I = [-\pi, \pi]$  et  $f(-\pi^+) = f(-\pi^-)$ .

**Théorème 20.2.** Si  $f(x)$  satisfait les conditions de Dirichlet alors

$$|a_n| \leq \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad |b_n| \leq \frac{k}{n}$$

### 20.2.1 Conséquence : vitesse de convergence des coefficients de $F$

Si  $f(-\pi^+) = f(-\pi^-)$  et  $f(x)$  est dérivable sur  $] -\pi, \pi[$  (elle est donc continue) et que  $f'$  satisfait aux conditions de Dirichlet alors

**Formule 20.3 (Vitesse de convergence des coefficients de Fourier).**

$$|a_n| \leq \frac{k}{n^2} \quad \text{et} \quad |b_n| \leq \frac{k}{n^2}$$

### 20.2.2 Application

À l'aide de telles fonctions on peut obtenir (en utilisant le théorème de Parseval) des sommes de séries du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

#### Exemple 20.1

Soit la fonction  $f(x) = x^2$  (fonction paire). On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2 \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n} x^2 \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \right] = \frac{4}{n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

d'où

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad x \in [-\pi, \pi]$$

et

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

## 20.3 Systèmes orthonormés complets

On généralise la notion de coefficient de Fourier à partir de systèmes de fonctions  $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$  définies sur  $[a, b]$  orthogonales deux à deux et autres que les fonctions trigonométriques.

On peut représenter une fonction  $f(x)$  donnée, satisfaisant certaines conditions (de régularité) à l'aide de  $\psi_k$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(x) \quad \text{où} \quad c_k = \frac{\int_a^b f(x) \psi_k(x) dx}{\int_a^b \psi_k^2(x) dx}$$

#### Exemple 20.2 Polynômes de Legendre

Soit  $\psi_k = P_k(x)$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ , où  $P_k$  est le polynôme de Legendre, défini par

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{(2k-2n)!}{2^k n! (k-n)! (k-2n)!} x^{k-2n}$$

Quelques valeurs :

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ &\dots \end{aligned}$$

On a

$$(\psi_m, \psi_n) = \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \mu_n \delta_{mn}$$

où  $\delta_{mn} = 1$  si  $m = n$  et 0 sinon.

Les polynômes sont orthogonaux avec

$$\mu_n = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

### Exemple 20.3 Polynômes d'Hermite

Soit  $\psi_k = e^{-x^2/2} H_k(x)$ ,  $[a, b] = \mathbb{R}$ , où  $P_k$  est le polynôme de Hermite, défini par

$$H_0 = 1 \quad H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}) \quad k = 1, 2, \dots$$

Quelques valeurs

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2x \\ H_2 &= 2(2x^2 - 1) \\ &\dots \end{aligned}$$

On a

$$(\psi_m, \psi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \nu_n \delta_{mn}$$