

# Rappel différentielle

## 1 Définition

La différentielle de  $f(x)$  en  $x_0$  vaut

$$df = f'(x_0) dx$$

Remarques:

- $d(u + v) = du + dv$ ;
- $d(u \cdot v) = u dv + v du$ ;
- $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ .

## 2 La différentielle d'une fonction à plusieurs variables

La différentielle de  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$  vaut

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_2) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n) dx_n$$

### 2.1 Calcul approximatif d'une fonction

$$f(x_1, y_1) = f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + df$$

## 3 Différentielle totale

### 3.1 Fonctions à 2 variables

L'expression  $g(x, y)dx + h(x, y)dy$  est une différentielle totale (c-à-d  $\exists f$  t.q.  $df = g(x, y)dx + h(x, y)dy$ ) si

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Déterminer  $f(x, y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y) &\Rightarrow f(x, y) = \int g(x, y) dx + u(y) = G(x, y) + u(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} G(x, y) + u'(y) = h(x, y) &\Rightarrow u'(y) = \dots \Rightarrow u(y) = \dots \Rightarrow f(x, y) = \dots \end{aligned}$$

### 3.2 Fonctions à 3 variables

L'expression  $g dx + h dy + l dz$  est une différentielle totale si

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial l}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z}$$

Déterminer  $f(x,y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g \Rightarrow f = \int g \, dx + u(y,z) = G + u(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}G + \frac{\partial u}{\partial y} = h \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = h_1 \Rightarrow u(y,z) = H_1 + v(z) \Rightarrow f = G + H_1 + v(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}H_1 + v'(z) = l \Rightarrow v'(z) = \dots \Rightarrow v(z) = \dots \Rightarrow f(x,y,z) = \dots$$

## 4 Équation avec différentielle totale (ou ED exacte)

Soit  $a(x,y) \, dx + b(x,y) \, dy = 0$  avec  $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$  ou  $a(x,y) + b(x,y)y'(x) = 0$

Méthode de résolution:

1. Former une fonction  $f(x,y)$  t.q.  $df = a \, dx + b \, dy$
2.  $f(x,y) = cte$  est une représentation implicite de l'ED

*Remarque:* si une ED  $a(x,y) \, dx + b(x,y) \, dy = 0$  n'est pas exacte, on cherche un facteur intégrant  $\mu(x,y)$  t.q.  $\mu a(x,y) \, dx + \mu b(x,y) \, dy = 0$  est un ED exacte. (On essayera de trouver un facteur intégrant simple, ie  $\mu(x,y) = \mu(x)$  ou  $\mu(x,y) = \mu(y)$ ).

## 5 Extremum d'une fonction $f$

### 5.1 Approximation quadratique de $f$ près de $(x_0, y_0)$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \sigma(d^2)$$

### 5.2 Extremum d'une fonction $f$

**Point stationnaire** en  $(x_0, y_0)$ :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ , c-à-d  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

**Maximum local** en  $(x_0, y_0)$ :  $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$  dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

**Minimum local** en  $(x_0, y_0)$ :  $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$  dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

**Classification des points stationnaires** Les points stationnaires se trouvent en  $f_x = 0$  et  $f_y = 0$ .

Soit  $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ , alors

$\Delta(x_0, y_0)$	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f$ admet en $(x_0, y_0)$ un
$> 0$	$< 0$	maximum (locale)
$> 0$	$> 0$	minimum (locale)
$< 0$		point selle
$= 0$		??? - tout peut se produire (cf. série 7, ex. 3)

*Remarque:* Soit  $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$  et  $\Delta^* = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

alors  $f(x,y,z)$  est un  $\begin{cases} \text{min. local} \\ \text{max. local} \\ \text{pt. selle} \end{cases}$  en  $(x_0, y_0, z_0)$  si  $\begin{cases} f_{xx} > 0, \Delta^* > 0, \Delta > 0 \\ f_{xx} < 0, \Delta^* > 0, \Delta < 0 \\ \Delta \neq 0 \end{cases}$

### 5.3 Extremums liés

Pour trouver les extremums de  $f(x,y,z)$  avec la contrainte  $g(x,y,z) = 0$  on procède la la façon suivante:

1. **Introduire la fonction de Lagrange:**  $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ .
2. **Trouver les points stationnaires de  $F$ ,** puis oublier  $\lambda$ :  $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$ .
3. Ev. vérifier si aux points trouvés  $\nabla g \neq (0,0,0)$ .

**Généralisation** Les extremums d'une fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  variables avec  $m$  contraintes  $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$ , avec  $m \leq n - 1$ :

1. **Introduire la fonction de Lagrange:**

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

2. **Trouver les points stationnaires de  $F$**  (oublier les  $\lambda_i$ ):  $F_{x_1} = \dots = F_{x_n} = F_{\lambda_1} = \dots = F_{\lambda_m} = 0$ .