

# Résumé de recherche opérationnelle

Auteur : *Samuel Robyr*<sup>1</sup>, 9 juillet 2006. Dernière version sur <http://epfl.neoch.net/>

## 1 Chaînes de Markov

### 1.1 Définitions

- Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires  $\{X_t, t \in T\}$  avec  $X_t$  = état du processus au temps  $t$  ( $X_t \in S$ ).
- Un processus stochastique dont l'ensemble des états  $S$  est fini ou dénombrable est appelé une **chaîne**.
- Un processus est à **temps continu** lorsque l'ensemble  $T$  est non dénombrable : typiquement  $T = \mathbb{R}_+$ .
- Un processus est à **temps discret** lorsque l'ensemble  $T$  est fini ou dénombrable : typiquement  $T = \mathbb{Z}_+$ .
- Un processus est **markovien** si, pour tout instant  $t$ , l'état courant  $X_t$  résume, à *lui seul*, tout l'historique du système susceptible d'influencer son évolution future.
- Une évolution particulière du processus est appelée une *trajectoire*.

### 1.2 Chaînes de Markov à temps discret

#### 1.2.1 Matrice de transition

La matrice de transition  $\mathbf{P}$  peut être représenté par un graphe représentatif  $G$ .

$\mathbf{P}$  est stochastique  $\iff p_{ij} \geq 0 \forall i, j; \sum_j p_{ij} = 1 \forall i$

La probabilité de transition de  $i$  à  $j$  en  $m$  étapes est donnée par l'élément  $ij$  de la matrice  $\mathbf{P}$  élevée à la puissance  $m$  :  $(\mathbf{P}^m)_{ij}$  avec  $\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}$ .

#### 1.2.2 Classification

1. Déterminer les classes en calculant les composantes fortement connexes du graphe  $G$  de la chaîne.
2. Construire le graphe réduit  $G_R$  dont les sommets sont les classes de la chaîne et en déduire la classification des classes et des états.

Une *classe* est :

- **persistante** si elle n'a *pas* de sommet successeur.
- **transitoire** si elle a *au moins* un sommet successeur.
- **absorbante** si elle est persistante et composée d'1 seul état.

Un *état* est :

- **persistant** s'il appartient à une classe persistante.
- **transitoir** s'il appartient à une classe transitoire.
- **absorbant** s'il appartient à une classe absorbante ( $p_{ii} = 1$ ).

3. *Classifier la chaîne* :

- Elle est **irréductible** si elle n'a qu'une seule classe, sinon elle est réductible.
- Elle est **absorbante** si tous ses états persistants sont absorbants.
- Elle est **ergodique** si elle possède une seule classe persistante et cette classe est apériodique. Le cas le plus fréquent est quand on a une chaîne irréductible et apériodique.

*Remarque* 1.1. La *période*  $d$  de l'état  $i$  est égale au plus grand commun diviseur de tous les  $n$  pour lesquels  $p_{ii}^{(n)} > 0$ .

#### 1.2.3 Étude des classes persistantes

Pour chaque classe persistante

1. Déterminer sa *période* :

La période est le plus grand commun diviseur des longueurs des circuits (nb d'arcs) du graphe de transition de la classe.

La classe est de période  $d$  si  $d > 1$ . Si  $d = 1$  la classe est apériodique.

2. Calculer sa *distribution stationnaire* :  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1 \dots \pi_n)$  solution (unique) de 
$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

$\mathbf{P}$  est ici la matrice de transition de la sous-chaîne associée à la classe persistante.

Cette distribution est unique si la chaîne est irréductible. Plus généralement, toute chaîne possédant une seule classe persistante possède une seule distribution stationnaire. Attention ! Il n'y a convergence vers cette distribution (indépendamment de la dist. initiale) que si la classe persistante est apériodique.

**Exemple 1.1 Calcul de la distribution stationnaire.** Pour calculer la distribution stationnaire il faut commencer par transposer la matrice  $\mathbf{P}$  ( $\pi \mathbf{P} = \pi$  est équivalent à  $\mathbf{P}^T \pi^T = \pi$ ). On échelonne alors la matrice  $[\mathbf{P}^T \pi^T]$ , par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1 & \pi_1 \\ 1/3 & 0 & 0 & \pi_2 \\ 1/3 & 1 & 0 & \pi_3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3\pi_2 \\ 0 & 1 & 0 & \pi_3 - \pi_2 \\ 0 & 0 & 1 & \pi_1 - \pi_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \pi_1 = 3 \\ \pi_2 = 1 \\ \pi_3 = 2 \end{cases}$$

Dans l'exemple on a fixé (arbitrairement)  $\pi_2 = 1$ . Or  $\boldsymbol{\pi} \mathbf{1} = 1$ . Il faut donc normaliser la distribution qu'on vient de trouver. On a  $3 + 1 + 2 = 6$ , d'où  $\pi = \left(\frac{3}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$  ■

#### 1.2.4 Étude des états transitoires

1. Contracter les classes persistantes afin d'obtenir une chaîne absorbante <sup>2</sup>

2. Mettre la matrice de transition de la chaîne sous *forme canonique* :

Réordonner les sommets dans la matrice :

- les sommets persistants sont numérotés en premier.
- les sommets d'une classe sont numérotés consécutivement.

Si la chaîne à  $k$  classes persistantes, la matrice sous forme canonique à la forme suivante :

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_1 & \dots & \mathbf{R}_k & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \text{ si la chaîne est absorbante : } \mathbf{P}' = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{array} \right)$$

3. Calculer la **matrice fondamentale**  $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$  et la **matrice des probabilités d'absorption**  $\mathbf{B} = \mathbf{NR}$ .

*Remarque* 1.2. Dans le cas d'une matrice  $2 \times 2$   $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

#### 1.2.5 Interprétation

- La probabilité (stationnaire) d'être dans l'état  $i$  est donnée par  $\pi_i$ .
- La proportion du temps passé dans l'état  $i$  est  $\pi_i$ .
- Le nombre moyen de transitions entre 2 visites successives de l'état  $i$  est donné par  $1/\pi_i$ .
- Le nombre moyen de périodes passées dans l'état transitoire  $j$  partant de l'état transitoire  $i$ , avant absorption, est l'élément  $n_{ij}$  de la matrice  $\mathbf{N}$ .

<sup>1</sup>Ce résumé est une version modifiée de *Recherche Opérationnelle* écrit par François Bochatay & Christina Hauenstein. Il contient aussi des parties de *Formulaire de Recherche Opérationnelle* écrit par Arnaud Zuffery. Un grand merci à tous pour avoir écrit et distribué ces documents.

<sup>2</sup>facultatif, mais conseillé : très souvent simplifie énormément les calculs.

- Le nombre moyen de transitions avant d'atteindre un état absorbant en partant de l'état transitoire  $i$  est la somme des éléments de la  $i^e$  ligne de  $N$ .
- La probabilité d'être absorbé par l'état  $j$  en partant de l'état transitoire  $i$  est donnée par l'élément  $b_{ij}$  de la matrice de  $\mathbf{B} = \mathbf{NR} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R}$ .
- La probabilité d'aller de  $i$  à  $j$  en  $m$  étapes *exactement* est

$$P_{ij}^{(m)} = P[X_m = j | X_0 = i] = \sum_{k \in S} P[X_m = j | X_{m-1} = k_1] \cdot P[X_{m-1} = k_1 | X_{m-2} = k_2] \cdot \dots \cdot P[X_1 = k_{m-1} | X_0 = i]$$

### 1.3 Chaînes de Markov à temps continu

#### 1.3.1 Probabilités et matrices de transition

Les probabilités de transition au temps  $t$  :  $p_{ij}(t) = P[X_t = j | X_0 = i]$   
La matrice (des probabilités) de transition au temps  $t$  :  $P(t) = (p_{ij}(t))$ . On suppose toujours  $P(0) = I$ .

#### 1.3.2 Classification

La classification est la même que pour une chaîne de Markov à temps discret augmentée des définitions suivantes :

**Classe et état.** Dans les chaînes à temps continu, les classes et états persistants sont appelés *récurrents*.

**Chaîne.** Elle est *régulière* ssi le nombre de transition qu'elle effectue dans un intervalle de temps fini est fini.  
Toute chaîne ayant un nombre fini d'état est régulière.  
Une chaîne est irréductible si tous ses états communiquent deux à deux.  
Une chaîne ergodique est aussi appelée *récurrente non nulle*.

#### 1.3.3 Structure/Interprétation

- Le temps de séjour  $\tau_i$  dans un état  $i$  est une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $\lambda_i$  ne dépendant que de  $i$ .
- La probabilité de passage quittant l'état  $i$  pour aller en  $j$ , notée  $q_{ij}$  est indépendante de  $t$  et de  $\tau_i$ .
- La suite des états visités par un chaîne de Markov à temps continu forme une chaîne de Markov à temps discret, appelée chaîne induite ou sous-jacente et donnée par sa matrice de transition  $Q = q_{ij}$  avec  $q_{ii} = 0$ .
- Le temps de séjour du processus dans l'était  $i$  est  $1/\lambda_i$ .
- Le temps moyen en partand de l'état  $i$  avant t'être absorbé par l'état  $j$  est  $\bar{T} = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} n_{ij}$ .
- Si au temps  $t = 0$  le processus est dans l'état  $i$ , la probabilité qu'il ne l'ait pas quitté au temps  $t = t_n$  est

$$P[\tau > t_n | X(0) = i] = 1 - F(t_n) = 1 - (1 - e^{-t_n \lambda_i}) = e^{-t_n \lambda_i} = e^{-t_n - a_{ii}}$$

#### 1.3.4 Loi exponentielle

La loi exponentielle est la seule loi continue sans mémoire.  
Soit  $X$  une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) :

$$P[X \leq x] = F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

La *densité* de  $X$  est  $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$   
L'*espérance* de  $X$  est  $E[X] = 1/\alpha$  et sa *variance*  $\text{Var}[X] = 1/\alpha^2$ .  
*i* est un état absorbant ssi  $i$  est une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $\alpha_i = 0$ . Si ce paramètre égal à l'infini alors la variable ne prend qu'une valeur : 0, c'est un état dont on sort tout de suite  $P|X \leq x|$  donne la *probabilité de sortir de l'état* pour  $t \leq x$ , et  $E[X]$  donne le *temps moyen de séjour*.  
Page 3.

#### 1.3.5 Matrice génératrice

Soit la matrice A (matrice d'intensité) :

$$a_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & \text{si } i = j \\ \lambda_i q_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(intensité de passage hors de } i) \\ \text{(intensité de transition de } i \text{ à } j) \end{matrix}$$

avec  $a_{ij} > 0$  si  $i \neq j$  et  $\sum_j a_{ij} = 0 \longrightarrow$  graphe représentatif de  $A$ .

#### 1.3.6 Matrice de transition de la chaîne sous-jacente

Le matrice de transition  $Q$  de la chaîne de Markov à temps discret sous-jacente peut être retrouvée à l'aide de la matrice génératrice à l'aide des règles suivantes :

$$q_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } a_{ii} < 0 \text{ et } j \neq i \\ 0 & \text{si } a_{ii} = 0 \text{ et } j \neq i \\ 0 & \text{si } a_{ii} < 0 \text{ et } j = i \\ 1 & \text{si } a_{ii} = 0 \text{ et } j = i \end{cases}$$

#### 1.3.7 Équations de Kolmogorov

Équation du futur :  $P'(t) = AP(t)$  Équation du passé :  $P'(t) = P(t)A$

#### 1.3.8 Distribution

Distribution initiale :  $\vec{\pi}(0)$   
Probabilité d'observer le processus dans l'état  $i$  au temps  $t$  :  $\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0)P(t)$   
Distribution stationnaire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}A = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\pi}\mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

Ce système a une solution unique si la chaîne est ergodique (récurrente non nulle).

**Exemple 1.2 Calcul de la distribution stationnaire.** *Pour calculer la distribution stationnaire il faut commencer par transposer la matrice A ( $\pi A = 0$  est équivalent à  $A^T \pi^T = 0$ ), puis l'échelonner-reduire, et on obtient par exemple :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La suite des calculs est du domaine de l'algèbre linéaire. La variable  $\pi_3$  est libre (toute la troisième ligne vaut 0). On fixe alors (arbitrairement)  $\pi_3 = 1$ . D'où :

$$0\pi_1 + 1\pi_2 - \frac{1}{5}\pi_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{1}{5}$$

et de la même façon on obtient  $\pi_1 = 1/5$ . On a donc  $\pi = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1)$   
Or  $\pi\mathbf{1} = 1$ . Il faut donc normaliser la distribution qu'on vient de trouver.  
On a  $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + 1 = \frac{7}{5}$ , d'où  $\pi = \left(\frac{1/5}{7/5}, \frac{1/5}{7/5}, \frac{1}{7/5}\right) = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)$

- |   |   |  |
|---|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Équation du bilan <math>-\pi_i a_{ii} = \sum_{j \neq i} \pi_j a_{ji}</math></li> <li>- Taux de transition hors de l'état <math>i</math> : <math>-\pi_i a_{ii}</math></li> <li>- Taux de transition dans l'état <math>i</math> : <math>\sum_{j \neq i} \pi_j a_{ji}</math></li> </ul> | } | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Proportion de temps passé dans l'état <math>i</math> : <math>\pi_i</math></li> <li>- Espérance du temps entre deux visites <math>\frac{1}{\pi_i \alpha_i}</math></li> </ul> |
|---|---|--|

1.3.9 Processus de naissance et de mort

Depuis  $i$ , les transitions se font que vers  $i - 1$  (mort) ou  $i + 1$  (naissance).  
Taux de naissance :  $\lambda_i$ , Taux de mort :  $\mu_i$   
Le processus reste dans l'état  $i$  pendant une durée aléatoire exponentielle de paramètre  $\alpha_i = \lambda_i + \mu_i$ .  
Lorsqu'il quitte l'état  $i$ , il se retrouve dans l'état  $i - 1$  ou  $i + 1$  avec une probabilité

$$q_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \qquad q_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

**Processus de Poisson** C'est un processus de naissance pur à taux constant :  $\lambda_i = \lambda$  et  $\mu_i = 0 \ \forall i$ .

Distribution de Poisson :  $\pi_i(t) = P[X_t = i | X_0 = 0] = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \ i = 0, 1, \dots$

1.3.10 Files d'attentes <sup>3</sup>

**Temps moyen d'exécution.** Le temps moyen d'exécution d'une tâche régie par une variable aléatoire est l'espérance de cette dernière.

**Espérances et variances** Propriétés :  $\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$  (pour  $A$  et  $B$  indépendants).

$$X \sim U(a, b) \qquad E[X] = \frac{a + b}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{(b - a)^2}{12} \qquad Y \sim \varepsilon(\lambda) \qquad E[Y] = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma_Y^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Exemple 1.3 File d'attente.** Soit une file  $M/M/1$  - *FIFO* stable en régime stationnaire. Si on note  $N$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes présentes à un instant quelconque dans la file, on a  $P[N = k] = \pi_k = (1 - \rho)\rho^k$  et la probabilité qu'il y ait au moins  $k$  clients présents dans un tel système est

$$P[N \geq k] = \sum_{i=k}^{\infty} P[N = i] = \sum_{i=k}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=k}^{\infty} (1 - \rho)\rho^i = (1 - \rho)\rho^k \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = (1 - \rho)\rho^k \frac{1}{(1 - \rho)} = \rho^k \quad \blacksquare$$

**Exemple 1.4 Réseaux de Jackson.** Des pièces arrivent selon un processus de Poisson de paramètre  $\gamma = 1$  dans un atelier composé de quatre machines  $M_1, \dots, M_4$  dont les temps de traitement obéissent à des lois exponentielles indépendantes de paramètres respectifs  $\mu_1 = 5/2, \mu_2 = 2, \mu_3 = 3/2, \mu_4 = 5/2$ . Sachant que :

- les pièces pénètrent dans l'atelier par  $M_1$  et le quittent par  $M_4$ ;
- la probabilité qu'une pièce soit traitée incorrectement par une machine et doive donc être retraitée (par cette machine) est de  $1/5$  pour  $M_1$  et  $M_2$ , de  $1/10$  pour  $M_3$ , et de  $0$  pour  $M_4$ ;
- les pièces correctement traitées par  $M_1$  sont acheminées avec probabilités égales vers  $M_2$  ou  $M_3$ , alors que celles traitées par  $M_2$  ou  $M_3$  sont directement envoyées vers  $M_4$ .

Les réseaux de Jackson nous permettent de calculer (entre autre) les éléments suivants

– La matrice de routage  $R$  du réseau de Jackson s'écrit :  $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et le vecteur  $\lambda$  des taux effectifs d'arrivée dans les files est donné par l'unique solution du système  $\lambda = \gamma + \lambda R$  où  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est le vecteur des taux d'arrivée externes. Après calcul on trouve  $\lambda = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{5}{8} & \frac{5}{9} & 1 \end{pmatrix}$

– Le système est stable si et seulement si  $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1 \ \forall i = 1 \dots 4$ , ce qui est le cas.

– Le système se comporte comme 4 files  $M/M/1$  indépendantes d'intensité  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  et la distribution stationnaire du réseau vaut donc :  $\pi^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{i=1}^4 (1 - \rho_i)\rho_i^{x_i}$  où  $x_i$  dénote le nombre de pièces dans la machine  $i$ .

- La machine critique est la machine avec le  $\rho$  (intensité du trafic) maximale, c'est à dire la machine  $M_1$
- Le nombre moyen de pièces dans le système  $\bar{N}$  est la somme des  $\bar{N}_i$ , où  $\bar{N}_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i}$  est le nombre moyen de pièces pour la  $i^e$  machine. Pour calculer le temps moyen nécessaire au traitement d'une pièce, on utilise la formule de Little :  $\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\gamma_1}$
- Le nombre moyen de pièces quittant l'atelier vaut  $r_{sortie}\lambda_4 = 1 \cdot 1 = 1$   $\blacksquare$

2 Programmation dynamique <sup>4</sup>

2.1 Modélisation

Système dynamique	Fonction coût
<ul style="list-style-type: none"><li>– Étapes <math>N</math></li><li>– État <math>x_k</math> avec <math>k \in \{1, \dots, N + 1\}</math></li><li>– Ensemble <math>S_k</math> des états à l'étape <math>k</math></li><li>– État initial <math>x_1</math></li><li>– État terminal <math>x_{N+1}</math></li><li>– Décision <math>u_k</math></li><li>– Ensemble <math>C_k</math> des décisions possibles à l'étape <math>k</math></li><li>– Ensemble <math>U_k(x_k)</math> des décisions admissibles dans l'état <math>x_k</math> à l'étape <math>k</math></li><li>– Fonction de transfert <math>f_k(x_k, u_k, \omega_k) = x_{k+1}</math></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>– Fonction de coût /gain <math>g_k(x_k, u_k, \omega_k)</math></li><li>– Coût /gain terminal <math>g_{N+1}(x_{N+1})</math></li><li>– Coût /gain total : <math>g_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{k=1}^N g_k(x_k, u_k, \omega_k)</math></li><li>– Équation de récurrence de l'utilité maximale : <math>J_k(x_k) = \max_{u_k \in U_k(x_k)} [g_k(x_k, u_k, \omega_k) + J_{k+1}(x_{k+1})]</math></li></ul>

2.2 Résolution

Pour la résolution du problème on utilise l'équation de récurrence de l'utilité maximale  $J_k(x_k)$  pour constriuire les tableaux, qui sont de la forme

$x_k$	$J_k(x_k, 0)$	$J_k(x_k, 1)$	$J_k(x_k)$	$\mu_k^*(x_k) = u_k^*$
0				
1				
...	...	...	...	...

- La 1ère colonne contient l'état possible au moment  $k$ .
- Les colonnes suivantes contiennent le coût en fonction de la décision prise ; l'avant dernière colonne contient le coût maximum que l'on peut obtenir à l'étape  $k$ .
- La dernière colonne donne le nombre d'objets choisi pour avoir un coût maximum.

**Exemple 2.1 Programmation dynamique.** Un éleveur doit se réapprovisionner en aliments secs pour ses chiens. Pour cela il se rend dans un magasin spécialisé en nourriture pour animaux avec  $b$  francs en poche. Le magasin propose  $N$  aliments secs différents, chaque produit étant caractérisé par son prix  $v_i$  (en francs) et son poids  $p_i$  (en kilogrammes). L'éleveur cherche à acheter une quantité maximale d'aliments (toutes marques confondues) sans dépasser son budget  $b$ .

On peut modéliser ce problème ainsi :

**Système dynmique à temps discret**

- Le système comprend  $N$  étapes, correspondant aux  $N$  types d'aliments à disposition.
- L'état  $x_k$  à l'étape  $k$  ( $k = 1, \dots, N + 1$ ) correspond au budget encore disponible pour les aliments de types  $k, \dots, N$ .
- L'ensemble  $S_k$  d'états possibles à l'étape  $k$  ( $k = 1, \dots, N + 1$ ) est  $S_k = \{0, 1, \dots, b\}$ .
- L'état initial  $x_1$  est égal à  $b$ , le budget total.
- L'état final  $x_{N+1}$  représente l'argent non dépensé.
- La décision  $u_k$  prise à l'étape  $k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) représente le nombre de sacs d'aliment  $k$  achetés.
- L'ensemble  $C_k$  de décisions possibles à l'étape  $k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) est  $C_k = \left\{ u_k \in \mathbb{Z}^+ | 0 \leq u_k < \left\lfloor \frac{b}{v_k} \right\rfloor \right\}$
- L'ensemble  $U_k(x_k)$  des décisions admissibles dans l'état  $x_k$  à l'étape  $k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) est  $U_k(x_k) = \left\{ u_k \in \mathbb{Z}^+ | 0 \leq u_k < \left\lfloor \frac{x_k}{v_k} \right\rfloor \right\}$
- Le problème étant déterministe, les perturbations  $\omega_k$ , les espaces  $\Omega(k)$  et les lois  $H_k(\cdot)$  n'ont pas besoin d'être définis.
- Si à l'étape  $k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), l'éleveur décide d'acheter  $u_k$  sacs d'aliment  $k$ , son budget actuel  $x_k$  est diminué de  $v_k u_k$ . La fonction de transfert du système dynamique est donc  $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) = x_k - v_k u_k, \ k = 1, \dots, N$ .

<sup>4</sup>Un résumé officiel sur la programmation dynamique est disponible sur le site du cours. Cette section contient que quelque ajout mineur.

<sup>3</sup>Un résumé officiel sur les files d'attentes est disponible sur le site du cours. Cette section contient que quelque ajout mineur.  
Page 5.

Fonction coût

- Le gain  $g_k$  de l'étape  $k$  est  $g_k(x_k, u_k) = p_k u_k$ , la quantité d'aliment  $k$  achetée.
- Le gain terminal est  $g_{N+1}(x_{N+1}) = 0$ .

- Le gain total, à maximiser est 
$$\sum_{k=1}^N g_k(x_k, u_k) + g_{N+1}(x_{N+1}) = \sum_{k=1}^N p_k u_k$$

On résout maintenant le programme dynamique formulé avec les données suivantes (budget  $b = 60$ ) :

Aliments $k$	1	2	3	4
Prix $v_k$	20	30	40	50
Poids $p_k$	10	15	30	40

Étape  $k = 1$ ,  $v_1 = 20$ ,  $p_1 = 10$

$x_1$	$J_1(x_1, 0)$	$J_1(x_1, 1)$	$J_1(x_1, 2)$	$J_1(x_1, 3)$	$J_1(x_1)$	$\mu_1^*(x_1) = u_1^*$
0	0+0= <b>0</b>	-	-	-	0	0
10	0+0= <b>0</b>	-	-	-	0	0
20	0+0=0	10+0= <b>10</b>	-	-	10	1
30	0+0=0	10+0= <b>10</b>	-	-	10	1
40	0+0=0	10+0=10	20+0= <b>20</b>	-	20	2
50	0+0=0	10+0=10	20+0= <b>20</b>	-	20	2
60	0+0=0	10+0=10	20+0=20	30+0= <b>30</b>	30	3

Étape  $k = 2$ ,  $v_2 = 30$ ,  $p_2 = 15$

$x_2$	$J_2(x_2, 0)$	$J_2(x_2, 1)$	$J_2(x_2, 2)$	$J_2(x_2)$	$\mu_2^*(x_2) = u_2^*$
0	0+0= <b>0</b>	-	-	0	0
10	0+0= <b>0</b>	-	-	0	0
20	0+10= <b>10</b>	-	-	10	0
30	0+10=10	15+0= <b>15</b>	-	15	1
40	0+20= <b>20</b>	15+0=15	-	20	0
50	0+20=20	15+10= <b>25</b>	-	25	1
60	0+30= <b>30</b>	15+10=25	30+0= <b>30</b>	30	{0,2}

Étape  $k = 3$ ,  $v_3 = 40$ ,  $p_3 = 30$

$x_3$	$J_3(x_3, 0)$	$J_3(x_3, 1)$	$J_3(x_3)$	$\mu_3^*(x_3) = u_3^*$
0	0+0= <b>0</b>	-	0	0
10	0+0= <b>0</b>	-	0	0
20	0+10= <b>10</b>	-	10	0
30	0+15= <b>15</b>	-	15	0
40	0+20=20	30+0= <b>30</b>	30	1
50	0+25=25	30+0= <b>30</b>	30	1
60	0+30=30	30+0= <b>40</b>	40	1

On obtient ainsi les solutions optimales 
$$\begin{cases} u_4^* = \mu_4^*(60) = 1 \\ u_3^* = \mu_3^*(10) = 0 \\ u_2^* = \mu_2^*(10) = 0 \\ u_1^* = \mu_1^*(10) = 0 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} u_4^* = \mu_4^*(60) = 0 \\ u_3^* = \mu_3^*(60) = 1 \\ u_2^* = \mu_2^*(20) = 0 \\ u_1^* = \mu_1^*(20) = 1 \end{cases}$$

2.3 Algorithme de Wagner Whitin

Soient  $d_t$  la demande,  $K_t$  les coûts fixes,  $c_t$  les coûts unitaires de production et  $h_t$  ceux de stockage durant la période  $t$ .

- calcul des  $c_{ij}$ , le coût engendré par une production à la période  $i$  de la quantité nécessaire à satisfaire la demande jusqu'à la période  $j$  :

$$c_{ij} = \underbrace{K_i + c_i \sum_{t=i}^j d_t}_{\text{coût de production}} + \underbrace{\sum_{t=i}^{j-1} h_t \sum_{k=t+1}^j d_k}_{\text{coût de stockage}}$$

- calcul du coût optimal pour les périodes  $i$  à  $N$  via les équation de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} J_i &= \min_{i \leq j \leq N} (c_{ij} + J_{j+1}) & i = N, \dots, 1 \\ J_{N+1} &= 0 \end{aligned}$$

Le coût optimal est donné par  $J_1$ .

Exemple 2.2. Soient les données et les  $c_{ij}$  calculés :

$t$	$d_t$	$K_t$	$c_t$	$h_t$	$c_{ij}$	1	2	3	4
1	4	30	5	3	1	50	134	268	408
2	10	20	8	5	2	-	100	234	374
3	10	30	5	4	3	-	-	80	156
4	8	40	3	-	4	-	-	-	64

Les tables optimales (formulation en avant) sont alors

$$J_1^f = 0 + 50 = 50$$

$$J_2^f = \min \begin{cases} 0 + 134 = \mathbf{134} \\ 50 + 100 = 150 \end{cases}$$

$$J_3^f = \min \begin{cases} 0 + 268 = 268 \\ 50 + 234 = 284 \\ 134 + 80 = \mathbf{214} \end{cases}$$

$$J_4^f = \min \begin{cases} 0 + 408 = 408 \\ 50 + 374 = 424 \\ 134 + 156 = 290 \\ 214 + 64 = \mathbf{278} \end{cases}$$

On a alors

$i$	1	2	3	4
$J_i^f$	50	134	214	278
$\mu^*(i)$	1	1	3	4

Le coût du plan de production optimal est  $J_5^f = 278$ .

Les périodes de production sont les périodes 1, 3 et 4. Le plan optimal est

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + d_2 = 4 + 10 = 14 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = d_3 = 10 \\ x_4 = d_4 = 8 \end{cases}$$